

# 一种叶片截面线光顺及等距面生成方法

## Method of Cross-Sectional Curve Fairing and Generation of Equidistant Offset Surface for Blade Surface

西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室 单晨伟 廖 恺 成宏军 胡海滨

**[摘要]** 采用等距面生成球头刀加工刀具轨迹是曲面加工中一种常用的方法。但是,在对叶身曲面进行等距偏置时,经常出现无法偏置的问题。针对该问题,分析了曲面偏置自相交原因,并根据叶片类零件叶身曲面的特点,提出了一种叶身截面线光顺及等距面生成方法。该方法首先采用 Kjellander 方法将原始截面线进行自动光顺,然后根据光顺后的原始截面线和数据采样法构造偏置截面线,最后通过截面线放样法构造叶身曲面等距面。实例表明,采用 Kjellander 方法可以实现叶片曲面的自动光顺和叶片曲面等距面的构造。

**关键词:** 叶片 截面线 等距面 光顺

**[ABSTRACT]** The using of equidistant offset surface to generate cutter path of ball-end milling is a common way in surface machining, however, in the equidistant offset process of blade surfaces, it's hard to get offset surface. For this issue, the reason of self-intersecting is investigated, and the method of cross-sectional curve fairing of blade and equidistant offset surface generation is presented based on the characteristics of blade surfaces. First, primeval cross-sectional curves gets automatically fairing through Kjellander's method of fairing. Second, offsett cross-sectional curves are structured on the basis of primeval cross-sectional curves after fairing and data sampling method. Finally, the equidistant offset surface can be constructed through all the offset cross-sectional curves by lofting. The example indicates that using Kjellander's method of fairing can fair automatically blade surface and structure the equidistant offset surface.

**Keywords:** Blade Cross-sectional curve Equidistant offset surface Fairing

DOI:10.16080/j.issn1671-833x.2015.01/02.115

对叶身曲面进行等距偏置,并利用偏置面进行数控编程是叶片加工中经常采用的方法。这些偏置面既可用于数控精加工中球头刀的刀心轨迹,也可作为数控编

程的驱动面。作为驱动面的偏置面公差一般不需要非常严格的精度。采用偏置面方法可以获得更加光滑的刀具轨迹,有利于加工过程的稳定性,并可提高精加工表面质量。现代计算机辅助几何设计的理论和实践表明:目前还没有比较理想的自由曲面等距面生成算法。在 CAD/CAM 软件中,为了获得等距面数据,一般先将原始面离散细分,然后求取母面离散点上的等距点,最后将这些等距点拟合合成等距面<sup>[1]</sup>。在实际实施过程中,当遇到自相交问题时,现有 CAD/CAM 软件往往无法处理。无法偏置的原因是出现了偏置之后的自相交问题,也就是微分几何中的奇异现象。可以说如何消除偏置自相交问题是曲面偏置中的一个研究热点。

在自由曲线的偏置中,无论是对平面曲线还是空间自由曲线,国内外的学者都进行了大量的研究<sup>[2-6]</sup>,提出了三次样条、分段 Bezier 曲线、三次均匀 B 样条和 NURBS 等逼近算法,取得了很好的效果。由于自由曲面在参数化和微分几何性质上的复杂性,大部分曲线偏置算法不能直接应用于曲面偏置的计算。Pham<sup>[7]</sup>提出了一种基于非均匀 B 样条曲线偏置的曲面偏置方法。Piegl 等<sup>[8]</sup>从数据采样的观点出发,首先对原始曲面上足够密的点进行偏置处理,然后在保证精度的前提下,再对上述偏置点进行采样,剔除不必要的点,最后再进行偏置曲面的 NURBS 插值。Shen 等<sup>[9]</sup>提出采用 level-set 方法构造用于数控加工刀具轨迹计算的偏置面,认为 level-set 方法可以解决曲面偏置中的自相交问题。

针对叶片类零件叶身曲面的特点,系统讨论了偏置面与原始面的几何关系,并提出了一种基于 Kjellander 方法的叶片截面线光顺及等距面生成方法。

### 1 曲面偏置自相交原因分析

设自由曲面为  $S(u, v)$ , 其偏置曲面可表示为

$$S_0(u, v) = S(u, v) + dn(u, v) \quad (1)$$

此处,  $n(u, v)$  为原始曲面  $S(u, v)$  上在参数  $(u, v)$  处的单位法矢,  $d$  为偏置距离。  $d > 0$  时, 沿法矢方向偏置;  $d < 0$  时沿法矢负方向偏置。假设  $\Gamma$  为曲面  $S$  上的简单

曲线段,则曲线  $\Gamma$  的自然参数方程为:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}(x(s), y(s), z(s)) \quad (2)$$

曲线  $\Gamma$  的偏置曲线  $\Gamma_0$  可表示为:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s) + d\mathbf{n}(s) \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{n}(s)$  为曲线  $\Gamma$  在曲面  $S$  上的单位法矢,有:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

曲线  $\Gamma$  的 3 个基本矢量,即单位切矢、主法矢和副法矢可表示为<sup>[10]</sup>:

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}'(s), \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}''(s), \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta},$$

其中  $\mathbf{r}'(s)$  和  $\mathbf{r}''(s)$  分别为曲线  $\Gamma$  关于弧长参数  $s$  的一阶和二阶导矢。曲面的法曲率可表示为<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \mathbf{n}(s)\mathbf{r}''(s) = (\mathbf{n}(s)\mathbf{r}'(s))' - \mathbf{n}'(s)\mathbf{r}'(s) \\ &= -\mathbf{n}'(s)\mathbf{r}'(s) = -\mathbf{n}'(s)\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{因此, } \mathbf{n}'(s) = -k_n\boldsymbol{\alpha} \quad (5)$$

由曲线论基本公式(Frenet-Serret 公式)可知:

$$\boldsymbol{\alpha}' = k\boldsymbol{\beta} \quad (6)$$

其中  $k$  为曲线  $\Gamma$  的曲率。

对公式(3)两边分别求关于弧长参数  $s$  的一阶和二阶导数,结合公式(6),得偏置曲线  $\Gamma_0$  的一阶和二阶导数<sup>[11-12]</sup>:

$$\mathbf{r}_0'(s) = \mathbf{r}'(s) + d\mathbf{n}'(s) = (1 - k_n d)\mathbf{r}'(s) = (1 - k_n d)\boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

由(8)可得偏置曲线  $\Gamma_0$  的主法矢  $\boldsymbol{\beta}_0$  为:

$$\mathbf{r}_0''(s) = (1 - k_n d)\mathbf{r}''(s) = (1 - k_n d)\boldsymbol{\alpha}' = k(1 - k_n d)\boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \frac{\mathbf{r}_0''(s)}{|\mathbf{r}_0''(s)|} = \boldsymbol{\beta} \quad (9)$$

由(9)可知,偏置曲线  $\Gamma_0$  与原始曲线具有相同的主法矢。因为

$$\mathbf{r}_0'(s) \times \mathbf{r}_0''(s) = k(1 - k_n d)^2 \boldsymbol{\gamma} \quad (10)$$

结合公式(7)和公式(10)可得偏置曲线  $\Gamma_0$  的曲率  $k_0$  为:

$$k_0 = \frac{|\mathbf{r}_0' \times \mathbf{r}_0''|}{|\mathbf{r}_0'|^3} = \frac{k}{1 - k_n d} \quad (11)$$

因此,偏置曲面与原始曲面之间的两个主曲率关系为:

$$k_{01} = \frac{k}{1 - k_1 d} \quad (12)$$

$$k_{02} = \frac{k_2}{1 - k_2 d} \quad (13)$$

因此,当原始面的主曲率之一等于  $1/d$  时,原始面上凹处在偏置之后就会导致偏置面上的法矢量不连续,当两个主曲率都等于  $1/d$  时,就会在凹处产生尖点。因此,要得到质量较好的偏置面,要求原始面上凹处最小

曲率半径大于偏置面和原始面的距离,否则生成的等距面将是奇异的,即出现自相交现象<sup>[1,12-15]</sup>。

叶身曲面分为叶背面和叶盆面,叶背面是凸曲面,叶盆面是凹曲面,一般在进排气边采用圆弧方式转接。这样的截面线就存在曲率法矢方向的突变问题,且叶盆面和进排气边邻接处的曲率半径往往较小,所以在进行叶身曲面偏置时容易造成自相交现象而无法偏置。为了避免自相交现象,实现叶身曲面的等距偏置,本文将叶片截面线进行光滑。这样既可以有效避免曲面偏置时的自相交现象,又可以保证通过截面线放样法得到的等距面具有很好的光顺性。

## 2 叶片截面线光滑方法

### 2.1 Kjellander 方法原理

对三次 B 样条曲线, Kjellander<sup>[16]</sup> 提出:曲线不光顺性的原因在于三阶导数的不连续性,即认为三阶导数跳跃越大的点越不光顺,因此可将数据修改至一“更好”的位置,使其三阶导数差为零,达到光滑曲线目的。

设  $\mathbf{P}(t)$  是插值于型值点列  $\{p_i, i = 0, 1, \dots, n\}$  的三次均匀参数样条曲线,型值点  $p_i$  对应的曲线参数为  $t_i (0 \leq t_i \leq 1, 0 \leq i \leq n)$ ,并设型值点  $p_k$  是坏点  $(0 < k < n)$ ,则 Kjellander 的光顺修改方法如下:

(1) 以相邻点  $p_{k-1}$  和  $p_{k+1}$  处的位矢及切矢信息  $\mathbf{P}(t_{k-1}), \mathbf{P}(t_{k+1}), \mathbf{P}'(t_{k-1}), \mathbf{P}'(t_{k+1})$  构造一条三次 Hermit 插值曲线  $\mathbf{C}(t) (0 < t < 2)$ ,并使得

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}(t_{k-1}), \mathbf{C}(2) = \mathbf{P}(t_{k+1}), \mathbf{C}'(0) = \mathbf{P}'(t_{k-1}), \mathbf{C}'(2) = \mathbf{P}'(t_{k+1}) \quad (14)$$

(2) 令  $\mathbf{P}^*(t_k) = \mathbf{C}'(1)$ ,用  $p_i^*$  代替型值点  $p_i$  再对修改后的型值点重新插值,得到修改后的三次 B 样条曲线。通过计算可知<sup>[16]</sup>

$$\mathbf{P}^*(t_k) = 1/2(\mathbf{P}(t_{k-1}) + \mathbf{P}(t_{k+1})) + 1/4(\mathbf{P}'(t_{k-1}) + \mathbf{P}'(t_{k+1})) \quad (15)$$

上式针对三次均匀参数样条曲线,对于非均匀参数样条曲线,文献[17]推导出了相应的计算公式:

设  $\mathbf{P}(t)$  是插值于型值点列  $\{p_i, i = 0, 1, \dots, n\}$  的三次非均匀参数样条曲线,并设点  $p_k$  为坏点  $(0 < k < n)$ ,需要进行光滑,参数  $t_i$  和  $t_{i+1}$  之间的变化量为  $\Delta_i$ ,即  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ 。从而  $\mathbf{P}(t_k)$  处的三阶导数差就可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'''(t_{k-1}) - \mathbf{P}'''(t_k) &= 12 \left( \frac{1}{\Delta_{k-1}^3} + \frac{1}{\Delta_k^3} \right) (\mathbf{P}(t_k) - \mathbf{P}^*) \\ \mathbf{P}^* &= \left( \frac{\mathbf{P}(t_{k-1})}{\Delta_{k-1}^3} + \frac{\mathbf{P}(t_{k+1})}{\Delta_k^3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{P}'(t_{k-1})}{\Delta_{k-1}} + \frac{\mathbf{P}'(t_{k+1})}{\Delta_k} \right) \\ &+ \frac{\mathbf{P}'(t_k)}{2} \left( \frac{1}{\Delta_{k-1}^2} - \frac{1}{\Delta_k^2} \right) / \left( \frac{1}{\Delta_{k-1}^3} + \frac{1}{\Delta_k^3} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

当该点处的三阶导数差为零时,可以认为三阶导数

跳跃最小,即该点满足光滑要求。此时,可以计算得到型值点 $p_k$ 的新位置:

$$P(t_k)(\text{new})=P^* = \left( \left( \frac{P(t_{k-1})}{\Delta_{k-1}^3} + \frac{P(t_{k+1})}{\Delta_k^3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{P'(t_{k-1})}{\Delta_{k-1}} + \frac{P'(t_{k+1})}{\Delta_k} \right) + \frac{P'(t_k)}{2} \left( \frac{1}{\Delta_{k-1}^2} - \frac{1}{\Delta_k^2} \right) \right) / \left( \frac{1}{\Delta_{k-1}^3} + \frac{1}{\Delta_k^3} \right)$$

对于均匀参数样条曲线,所有的 $\Delta_i$ 相同,即可得到Kjellander方法:

$$P(t_k)(\text{new})=1/2(P(t_{k-1})+P(t_{k+1}))+1/4(P'(t_{k-1})+P'(t_{k+1})) \quad (17)$$

从以上分析不难发现,Kjellander方法的基本思想是:首先,在 $p_{k-1}$ 与 $p_{k+1}$ 点之间寻找一条局部能量最小的三次插值曲线,使它与原曲线在 $p_{k-1}$ 与 $p_{k+1}$ 点处达到一阶连续;再利用式(15)计算得到 $P_i$ 点的新位置;最后,对修改后的型值点重新插值,得到修改后的三次B样条曲线。取 $2j$ 个邻近点位矢,并计算出切矢 $P'(t_{k-j}), \dots, P'(t_{k-1}), P'(t_{k+1}), \dots, P'(t_{k+j})$ , ( $1 \leq j \leq \min(k, n-k)$ ) 信息 $P'(t_{k-j})$ 与 $P'(t_{k+j})$ 。根据这些条件连同未知量 $P^*(t_k)$ 可写出插值曲线的表达式 $P(t)$ ,并令 $\min \int_{k-j}^{k+j} (P''(t))^2 dt$ ,即可求出 $P^*(t_k)$ 。当取 $j=1$ 时,即可得出公式(15)。由此可以看出Kjellander的光顺方法实际上是一种局部能量最优的光顺方法。

## 2.2 截面线自动光顺方法的实现

为了实现截面线的自动光顺功能,必须按照某种方式计算出需要光顺的点,而不是手动选取需要光顺的点。本文采用Kjellander提出寻找坏点的方法:计算每一点 $p_i$ 和相应的修正点 $p_i^*$ 之间的距离 $L_i$ ,在 $\{L_i, i=0, 1, \dots, n\}$ 中选出最大值 $L_{\max}$ 。若第 $j$ 点的距离最大,则第 $j$ 点 $p_j$ 即为确定的待光顺点。

本文采用自动迭代与阈值判断相结合的方式结束光顺,具体的实施步骤如下:

- (1) 选择待光顺的截面线;
- (2) 定义代表光顺次数的循环变量 $k$ ,设定初始值 $k=0$ ;
- (3) 按照Kjellander方法光顺截面线;
- (4) 令变量 $k=k+1$ ,如果 $<20$ ,则返回到第0步,继续光顺该条截面线,否则,执行第0步;
- (5) 按照Kjellander方法光顺截面线,定义变量 $\Delta L_{k-1} = |L_{\max,k} - L_{\max,k-1}|$ ,其中 $L_{\max,k}$ 表示第 $k$ 次光顺截面线时计算得到的最大距离值,并计算;
- (6) 定义阈值 $=0.01\text{mm}$ ,如果 $\Delta L_{k-1} < 0.01$ ,则结束该截面线的

光顺,否则,令变量 $k=k+1$ ,再重复第(5)、(6)步。

## 3 基于截面线的叶身曲面等距面生成方法

等距面构造的基本原理是:首先将原始截面线按照Kjellander方法进行自动光顺,将光顺后的截面线根据弦高误差要求离散为一系列的点,离散后的点沿截面线法矢进行等距偏置,然后根据偏置点构造偏置后的截面线,最后通过截面线放样法构造叶身等距面。

叶身等距面的构造流程如图1所示,其具体实现步骤如下:

- (1) 输入原始截面线,假设共有 $n$ 条截面线;
- (2) 定义代表截面线的循环变量 $j$ ,设定初始值 $j=0$ ;
- (3) 按照Kjellander方法自动光顺第 $j$ 条截面线;
- (4) 根据弦高误差要求,将光顺后的第 $j$ 条截面线离散为一系列的数据点,并计算出截面线离散数据点在该截面上的法矢方向;
- (5) 离散后的点沿截面线法矢进行等距偏置,得到新的截面线数据点;
- (6) 根据偏置后的截面线型值点,构造出第 $j$ 条偏置截面线;
- (7) 令变量 $j=j+1$ ,如果 $j < n$ ,则返回到第(4)步继续计算,否则,执行第(8)步。
- (8) 根据偏置截面线,采用弧长对齐放样法将叶盆、

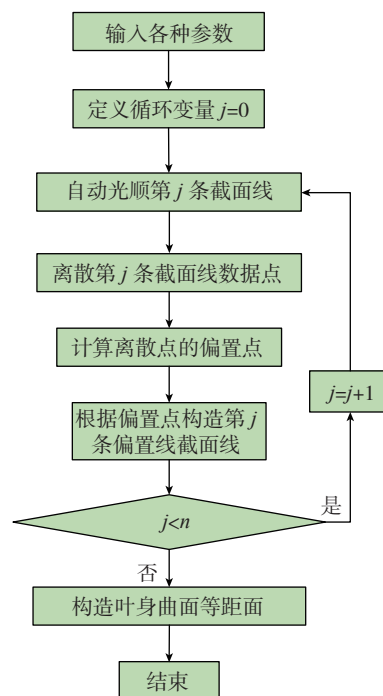


图1 构造叶身曲面等距面流程图

Fig.1 Flow chart of structuring equidistant offset surface for blade surface

叶背截面线端点分别对齐,构造出叶身曲面等距面。

原始截面线采用 Kjellander 方法自动光滑,且偏置截面线的叶盆、叶背截面线端点采用了弧长对齐方式,避免了偏置后的截面线出现自相交现象,而且构造的叶片曲面等距面是光滑的。以此等距面作为驱动面可以获得更加光滑的刀具轨迹。

#### 4 实例验证

根据本文提出的方法,采用基于 UG18 的二次开发方法,利用 VC++6.0 进行编程,开发出了截面线光滑和等距面生成模块。本文以某叶片三维模型进行了实例验证。设定参数:偏置距离 2mm,截面线条数 12。图 2 所示为叶片截面线自动光滑的结果,其中图 2(a)为原始截面线,图 2(b)为采用本文提出的自动光滑方法光滑后的截面线,截面线上的直线段为曲率梳。

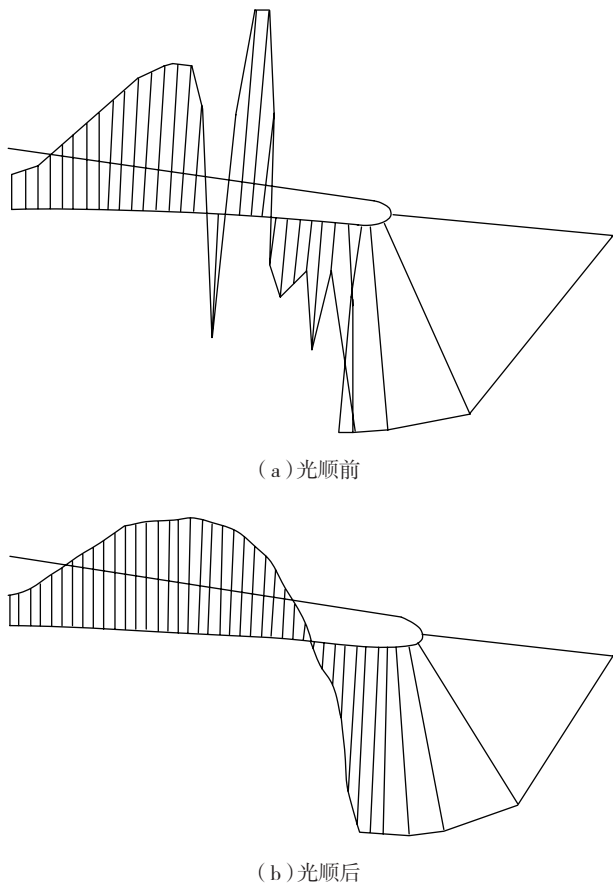


图2 叶片截面线自动光滑的结果

Fig.2 Results of automatic fairing of the blade cross-sectional curve

#### 5 结论

自相交是自由曲面偏置中经常出现的问题,特别是通过测绘等手段得到的曲面,在应用中经常会遇到不能偏置的现象。针对该问题,本文分析了曲面偏置

自相交的原因,并根据叶片曲面特点,提出了一种基于 Kjellander 方法的叶身截面线光滑及等距面生成方法。

(1) 采用 Kjellander 自动光滑方法对原始截面线进行了光滑,有利于构造出更加光滑的叶身曲面。

(2) 采用截面线等距偏置方法,很容易实现叶身曲面的偏置。

尽管该方法存在一定的偏差,但是可以通过加密截面线数量提高等距偏置面的精度。该方法最大的益处是可以避免曲面偏置中的自相交问题。本文提出的方法操作简单,实例表明,根据该方法构造的叶身等距面光滑性好,为获得更加光滑的刀具轨迹、提高加工过程中的稳定性和精加工表面质量奠定了良好的基础。

#### 参考文献

- [1] 刘雄伟,张定华,王增强,等. 数控加工理论与编程技术. 北京:机械工业出版社,2000.
- [2] Klass R. An offset spline approximation for plane cubic splines. Computer-Aided Design, 1983,15 (4):297-299.
- [3] Hoschek J. Spline approximation of offset curves. Computer Aided Geometric Design,1988,5(5):33-40.
- [4] Pham B. Offset approximation of uniform B-splines. Computer-Aided Design, 1988, 20 (8):471-474.
- [5] 蒋大为,李安平. 空间等距线的 NURBS 形式. 航空计算技术,1995(2):33-38.
- [6] 尹小奎,李奇敏,叶仲泉,等. NURBS 曲面光滑方法综述. 图形学报,2012,33(5):13-18.
- [7] Pham B. Offset curves and surfaces: a brief survey. Computer Aided Design, 1992(4):223-229.
- [8] Peigl L A, Tiller W. Computing offsets of NURBS curves and surfaces. Computer-Aided Design, 1999,31(2):147-156.
- [9] Shen H, Fu J, Chen Z, et al. Generation of offset surface for tool path in NC machining through level set methods. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 46(9):1043-1047.
- [10] 吴大任. 微分几何讲义. 北京:人民教育出版社,1979.
- [11] Peigl L A, Tiller W. Computing offsets of NURBS curves and surfaces. Computer-Aided Design, 1999, 31(2):147-156.
- [12] Farouki R T, Neff, C A Analytic properties of plane offset curves. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4):83-100.
- [13] Maekawa T. An overview of offset curves and surfaces. Computer-Aided Design, 1999, 31(3):165-173.
- [14] Ravi Kumar G V V, Shastry K G, Prakash B G. Computing non-self-intersecting offsets of NURBS surfaces. Computer-Aided Design, 2002, 34(3):209-228.
- [15] Seong J K, Elber G, Kim M S. Trimming local and global self-intersections in offset curves/surfaces using distance maps. Computer-Aided Design, 2006, 38 (3):183-193.
- [16] Kjellander T A. Smoothing of cubic parametric splines. Computer-Aided Design, 1983, 15(3):175-179.
- [17] Poliakoff J F. An improved algorithm for automatic fairing of non-uniform parametric cubic spline. Computer-Aided Design, 1996, 28(1):59-66.

(责编 叶枫)