

## 复模态指数函数在正交多项式辨识模态参数算法中的应用\*

## Application of Complex Mode Indicator Function in the Identification of Modal Parameters by Using Orthogonal Polynomials Method

北京航空航天大学机械工程及自动化学院 王恩远 刘 强 李 尧

[摘要] 首先介绍了模态指示函数的发展历程和研究现状,重点研究了复模态指示函数(CMIF)的相关理论,并探讨了噪声的存在对复模态指示函数计算结果的影响,之后引入 Savitzky-Golay 平滑滤波方法对 CMIF 曲线进行了平滑滤波,最大程度上消除了噪声干扰的影响;然后研究了基于 CMIF 指示结果的频响函数数据智能抽取算法;最后本文将平滑滤波后的 CMIF 和基于 CMIF 的 FRF 数据智能抽取算法应用在 Forsythe 正交多项式模态参数辨识算法中,并进行了仿真算例验证,取得了较好的效果。

**关键词:** 复模态指示函数 Savitzky-Golay 平滑滤波器 Forsythe 正交多项式 模态参数辨识

[ABSTRACT] At first, this paper presents an overview of the latest development in mode indicator functions. Then, this paper researches the complex mode indicator function(CMIF) in detail and verifies its performance considering the interference of noise. As the existence of noise produces a big effect on the performance of the CMIF, this paper smoothes the CMIF by using Savitzky-Golay smoothing filter which can eliminate the interference of noise at the maximal extent. Furthermore, this paper proposes a new extraction algorithm of FRF data which is based on the results of CMIF. Finally, the smoothed CMIF and the FRF extraction algorithm are applied to the identification of modal parameters by using Forsythe orthogonal polynomials method and obtain a good result.

**Keywords:** Complex mode indicator function Savitzky-Golay smoothing filter Forsythe orthogonal polynomial Modal parameter identification

DOI:10.16080/j.issn1671-833x.2015.S2.099

模态测试技术是获取机械结构模态参数的一种重要技术手段,但是实际进行模态测试试验时,测试获取的数据不可避免地会受到一些人为和环境的干扰,这也使得进一步计算得到的频响函数存在着一些虚假模态,

因此如何准确确定模态的数目和从频响函数中提取真实模态的数据便成为一个亟需解决的问题。模态指示函数(Mode Indicator Function)便是在这种背景下产生。模态指数函数的作用主要是从测试获得的频响函数曲线中确定模态的位置和确定模态的阶次,这也是进一步进行模态拟合和参数辨识的基础。BREITBACH E J 在 1973 年首次提出了模态指示函数的概念,并进行了模态指示函数的相关理论研究和试验算例验证工作<sup>[1-2]</sup>。随后的几十年间,相继有多名学者提出了多种不同形式的模态指示函数<sup>[3-8]</sup>。

根据目前对频响函数矩阵数据处理方法的不同,可将目前的模态指示函数分为两类:一种是对频响函数数据进行奇异值分解得到模态指示函数,如 CMIF 以及由此延伸出的 MRMIF、ImMIF 和 ReMIF 等;另外一种求解频响函数矩阵的特征值得到的模态指示函数,如 RMIF、MMIF、MRMIF、CoMIF 等。在以上诸多版本的模态指示函数中,CMIF 是综合性能比较出色的模态指示函数之一,同时也是在实际商业模态测试与分析软件应用最多的模态指示函数。

ALLEMANG R J 和 BROWN D L 回顾了复模态指示函数(Complex Mode Indicator Function)自提出至今的理论研究进展以及在实际中的拓展应用<sup>[9]</sup>。RADEŞ M 的相关研究<sup>[6,10]</sup>表明,在绝大多数情况下,CMIF 是性能相对较为出色的模态指数函数,尤其在识别密集模态和重复模态方面性能十分显著。但是当前的研究及应用大多并未考虑噪声干扰对复模态指示函数的影响,这导致复模态指示函数指示出的模态中存在着一定数量的虚假模态,而且大多数情况下复模态指示函数计算出结果以后还需要用户手动选取合适的模态进行进一步分析和处理,并不能自动判断出模态的阶次和位置,这也在一定程度上制约了复模态指示函数在试验模态分析技术中的广泛使用。

本文在研究复模态指示函数基本理论的基础上,给出了复模态指示函数在 SISO 和 SIMO 系统上的拓展公式,之后探讨了噪声的存在对复模态指示函数计算结果的影响,并引入 Savitzky-Golay 平滑滤波方法对模态指示函数曲线进行了平滑滤波,最大程度上消除了噪声干

\* 国家自然科学基金重大项目(No.11290144)、基础科研计划资助项目(A2120110002)资助。

扰的影响,然后研究了基于复模态指示函数指示结果的有效频响函数数据点的智能抽取算法并在正交多项式辨识模态参数算法中进行了应用和算例仿真验证。

### 1 复模态指示函数相关理论

对于任意一个线性时不变结构系统,假定系统的激励力输入为  $\{f\}$ ,系统的稳态响应为  $\{x\}$ ,激励点的数目为  $N_i$ ,响应点的数目为  $N_o$ ,通常  $N_i \leq N_o$ ,  $L$  为频率点数,令  $N=N_o \times N_i$ ,则对于该系统有

$$\{x\}=[X_R]+i\{X_I\}=[H_N(i\omega)]\{f\}=[HR(\omega)+iHI(\omega)]\{f\} \quad (1)$$

其中,  $H_N(i\omega)$  是系统的频响函数矩阵。复模态指数函数有两种定义形式,如公式(2)和公式(3)所示。公式(2)是基于奇异值分解定义的,公式(3)是基于特征值分解定义的,两种定义方式在本质上是等价的<sup>[11]</sup>。

$$[H(\omega_k)]=[U(\omega_k)][\Sigma(\omega_k)][V(\omega_k)]^H \quad (2)$$

$$[CMIF(\omega_k)]=[\Sigma(\omega_k)]^H[\Sigma(\omega_k)],$$

$$[H(\omega)]^H[H(\omega)][F(\omega)]=\lambda(\omega)[F(\omega)]$$

$$=[U(\omega_k)][\Sigma(\omega_k)][V(\omega_k)]^H \quad (3)$$

$$[CMIF(\omega)]=\lambda(\omega)[\Sigma(\omega)]^2$$

公式(2)和公式(3)中,上标 H 表示矩阵的共轭转置,参数  $k=1,2, \dots, L$ ,  $[\Sigma(\omega_k)]$  为矩阵  $[H(\omega_k)]$  的奇异值矩阵,满足公式(4):

$$[\Sigma(\omega_k)]=\text{diag}(\sigma_1(\omega_k), \sigma_2(\omega_k), \dots, \sigma_p(\omega_k)),$$

$$p=\min\{N_o, N_i\} \quad (4)$$

因此,当  $N_i=N_o=1$ ,可得单输入单输出系统(SISO)的复模态指示函数如公式(5)所示,这和文献[12]中提到的频响函数平均功率谱的定义公式本质上是一致的;当  $N_i=1, N_o$  大于 1 时,可得单输入多输出系统(SIMO)的复模态指示函数如公式(6)所示。

$$CMIF_{SISO}(\omega_k)=H(\omega_k)^H \cdot H(\omega_k)=|H(\omega_k)|^2, \quad (5)$$

$$CMIF_{SISO}(\omega_k)=H(\omega_k)^H \cdot H(\omega_k)=\sum_{j=1}^{N_o} |H_{j1}(\omega_k)|^2, \quad (6)$$

在公式(5)和公式(6)中,参数  $k=1,2, \dots, L$ 。图 1 为使用 CMIF 对某系统频响函数数据的计算结果。分析

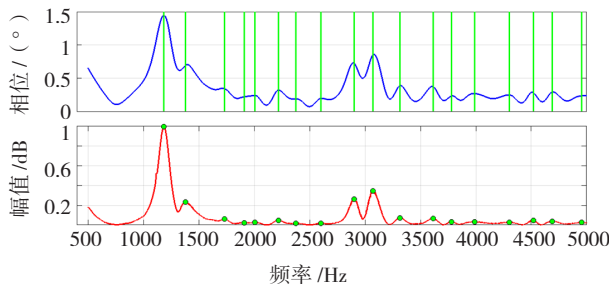


图1 某线性结构系统的CMIF曲线  
Fig.1 CMIF curve of a linear structure

以上公式定义以及图 1 中 CMIF 的计算结果可得结论如下:

- (1) CMIF 曲线数目由激励点的个数决定,曲线极大值在系统谐振频率处出现。
- (2) CMIF 曲线对于密集模态也有很好的识别作用。

### 2 噪声对 CMIF 计算结果的影响以及消除措施

#### 2.1 噪声对 CMIF 计算结果影响

在现场进行试验时,由于试验现场环境的复杂性,模态测试获得的频响函数数据不可避免带有噪声。而模态指示函数是进一步进行参数辨识的基础,因而有必要研究噪声干扰对 CMIF 指示结果的影响,进而采取必要的技术手段减小噪声对 CMIF 指示结果的影响。图 2 为一个 8 自由度线性阻尼高耦合振动系统,其中地面绝对光滑,  $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=1\text{kg}$ ,  $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=k_7=k_8=72000\text{N/m}$ ,  $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=c_7=c_8=12\text{Ns/m}$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_8$  为系统的输入,  $x_1, x_2, \dots, x_8$  为系统的响应输出。以  $f_1$  为输入,  $x_8$  为系统的响应输出,分别在无噪声,10% 白噪声,30% 白噪声 3 种情况下通过 MATLAB/SIMULINK 进行理论仿真计算获得相应的系统频响函数,分别如图 3(a),(b),(c) 所示。图 3(d)为这 3 种噪声情况下对应的 CMIF 曲线。表 1 为这 3 种噪声比例下对 CMIF 计算结果的对比分析。

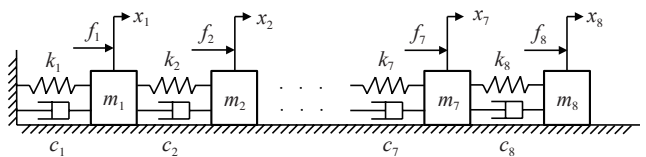


图2 8自由度线性阻尼高耦合振动系统  
Fig.2 8-DOF linear damped vibration system with close coupling

由图 3 和表 1 的结果分析可知,CMIF 能够很好地识别出系统中谐振频率的位置,进而确定被测系统的阶次,而且 CMIF 对谐振频率的识别准确度很高,最大误差仅 4% 左右。但是随着噪声比例的增大,系统识别出的阶次也会急剧的增加,这也使得真实模态被湮没在大量虚假模态中,极大地增加了用户识别和选取的难度。因而有必要采取一定的平滑滤波手段,来尽可能地消除噪声对 CMIF 指示结果的影响。

#### 2.2 Savitzky-Golay 平滑滤波消除噪声影响

由于 CMIF 主要用来确认待辨识系统的模态阶次和位置,因此对 CMIF 进行平滑滤波需要满足以下两个条件:

- (1) 在平滑滤波消除噪声的同时,应最大程度上确

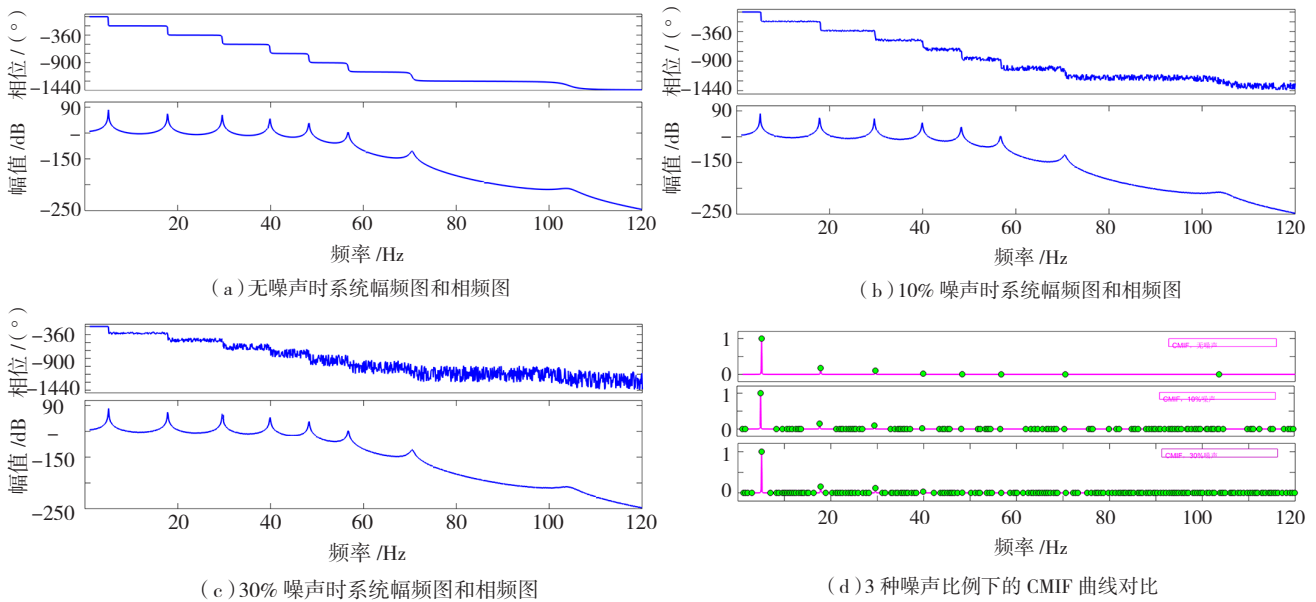


图3 无噪声, 10%噪声, 30%噪声三种情况下系统频响函数及CMIF曲线对比  
Fig.3 Comparison of FRF curves and CMIF curves with no noise,10% noise and 30% noise

表1 噪声比例大小对CMIF计算结果影响对比

模态		理论值	无噪声		10% 噪声		30% 噪声	
识别阶次		8	8		102		186	
谐振频率识别准确度	阶次	频率 /Hz	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%	频率 /Hz	误差 /%
	1	5.08	5.1	0.39	5.1	0.39	5.1	0.39
	2	17.8	17.8	0	17.9	0.56	18.1	1.69
	3	29.6	29.6	0	29.5	0.33	30.5	3.04
	4	39.9	39.9	0	39.8	0.25	38.3	4.01
	5	48.3	48.3	0	48.3	0.0	48.3	0
	6	56.7	56.7	0	56.9	0.35	56.8	0.17
	7	70.5	70.5	0	70.4	0.14	70.3	0.28
	8	104	103.6	0.38	103.3	0.67	104.2	0.20

注: 表中 10%, 30% 噪声下谐振频率识别准确度分析用的谐振频率是从 CMIF 挑选出最接近理论值的谐振频率。

保原 CMIF 曲线形状(如相对极大值,极小值等)和宽度等分布特性不发生较大的改变;

(2) 滤波程度应可控,即用户能够根据自己的需要和噪声特点选择平滑滤波的强弱程度。

Savitzky-Golay 滤波器正是一种满足上述要求的一种性能优越的平滑滤波器,它是一种在时域内基于多项式通过移动窗口利用最小二乘法进行最佳拟合的滤波方法<sup>[13]</sup>,并且可通过调整拟合阶次和分段数据点数来调整滤波的强弱。现讨论由 Savitzky 和 Golay 导出的方法<sup>[14]</sup>。设一组数据为  $x(k)$ ,令  $k=-m, -m+1, \dots, m-1, m$ 。令数组  $x$  的元素个数为  $M$ ,则有  $M=2m+1$ 。现构造一个  $N$

阶多项式使用最小二乘法来拟合这一组数据。

$$\hat{x}(k) = \sum_{j=0}^N b_j k^j =$$

$$[1 \ k \ k^2 \ \dots \ k^N][b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N]^T \quad (7)$$

令  $\mathbf{b}=[b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N]^T$ ,  $\mathbf{A}$  为  $M \times (N+1)$  矩阵,且满足  $\mathbf{A}(k, j)=k^j$ ,其中  $j=0, 1, \dots, N$ 。则有:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(-m) & \hat{x}(-m+1) & \dots & \hat{x}(m-1) & \hat{x}(m) \end{bmatrix}^T = \mathbf{A}\mathbf{b}, \quad (8)$$

构造误差函数  $\tilde{e}_k = x(k) - \hat{x}(k)$ ,则误差项的平方和为:

$$E = \sum_{k=1}^M (x(k) - \hat{x}(k))^2 = (X - \hat{X})^T (X - \hat{X}), \quad (9)$$

若使  $E$  取得最小值,则有:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2A^T Ab - 2A^T X = 0, \quad (10)$$

由公式(10)可得多项式的系数向量

$$b = (A^T A)^{-1} A^T X, \quad (11)$$

进而可求得滤波后的估计值数组

$$\hat{X} = Ab = A (A^T A)^{-1} A^T X. \quad (12)$$

令  $S = A (A^T A)^{-1} A^T$ , 则  $S$  为  $M \times M$  阶方阵。当需要拟合的数据点数  $L$  大于  $M$  时,拟合次数为  $N (N \leq (M-1))$ ,可按公式(13)计算平滑滤波后的数据点。图4为使用 Savitzky-Golay 平滑滤波算法对某信号进行平滑滤波前后的对比图,其中数据点数为 1000 点,  $M=51$ ,  $N=2$ 。由此可以看出, Savitzky-Golay 平滑滤波算法是一种性能出色的平滑滤波算法,在对数据进行光顺的同时,还能最大程度地保留原信号的形状和宽度等信息。图5对某系统的 CMIF 曲线进行 Savitzky-Golay 平滑滤

$$\hat{x}(k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^M S(j, k) \cdot x(j), & 1 \leq k \leq m+1 \\ \sum_{j=1}^M S(j, m) \cdot x(k-m-1+j) & m+2 \leq k \leq L-m-1 \\ \sum_{j=1}^M S(j, M-L+k) \cdot x(k-2m-1+j), & L-m \leq k \leq L \end{cases} \quad (13)$$

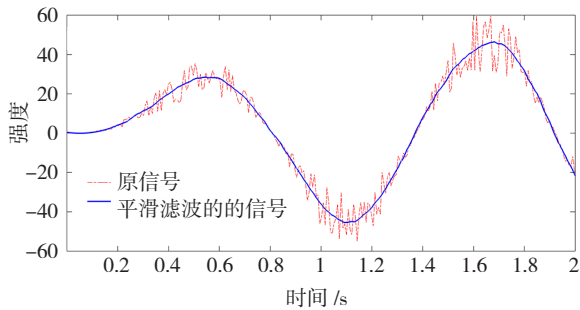


图4 某信号Savitzky-Golay平滑滤波前后对比  
Fig.4 Comparison of original signal and smoothed signal by using Savitzky-Golay method

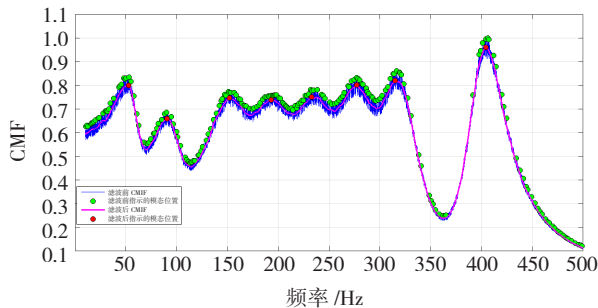


图5 某系统CMIF Savitzky-Golay平滑滤波前后对比  
Fig.5 Comparison of original CMIF curve and smoothed CMIF curve by using Savitzky-Golay method

波前后的对比图。可以看出对平滑滤波的 CMIF 曲线,能够有效地避免识别出虚假模态,模态数目识别准确度大大提升,而且识别出的模态位置相对滤波前并未发生较大的变化。

### 3 FRF 数据智能自动抽取

模态测试获得的 FRF 数据点的增加会增大模态参数辨识算法的计算量,而对模态参数辨识结果的准确度的提升作用不大。噪声比例大小则会直接影响最终模态参数辨识结果的准确度。一种行之有效的解决方法是从 FRF 数据中抽取受噪声影响较小的数据点进行参数辨识。大量模态测试试验表明,FRF 幅频曲线波谷附近的频率点对应的相干系数往往会比较低,而波峰附近对应的相干系数则往往比较高。这说明 FRF 幅频曲线波谷处附近数据点的信噪比较低,受噪声干扰程度相对较大;而波峰附近数据点的信噪比较高,受噪声干扰程度相对较小。图6为某机床“主轴-刀具”系统的 FRF 幅频曲线和相关系数曲线,从图6中可以明显地看出 FRF 幅频曲线波谷附近的相干系数相比波峰附近点处要有明显的下降。

要根据上述方法对 FRF 数据进行抽取,就涉及到如何自动感知波峰和波谷点的问题。根据公式(5)可知 CMIF 曲线和 FRF 幅频曲线在具有相同的特性,即在同一点处取得极大值和极小值。因此可以根据 CMIF 曲线的指示结果对 FRF 数据进行抽取。由于 CMIF 曲线受噪声的影响较大,因此单纯的极大值和极小值判定条件已经不能有效地判断出宏观波峰和波谷的位置。因此本文提出了极值判定敏感度因子的概念,并使用局部最优条件来判定波峰和波谷的位置。假设 CMIF 曲线由  $L$  个数据点组成,首先由用户设定极值判定敏感度因子  $q (0 < q \leq 1)$ ,则可得到极值判定宽度  $B = \lceil [L/2 - 1] \cdot q \rceil$  ( $\lceil a \rceil$  表示不大于  $a$  的最大正整数)。因此,对于任意  $j \in [-B, -B+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, B-1, B]$ ,若在  $k$  点满足  $CMIF(\omega_k) > CMIF$

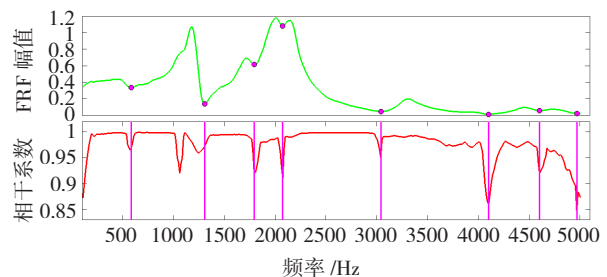


图6 某机床“主轴-刀具”系统的FRF幅频曲线和相关系数  
Fig.6 Amplitude FRF curve and correlation coefficient curve of the “Spindle-Tool” system of a machine

( $\omega_{k+j}$ ),则可判定该点为波峰点;对于任意 $j \in [-B, -B+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, B-1, B]$ ,若在 $k$ 点满足 $CMIF(\omega_k) < CMIF(\omega_{k+j})$ ,则可判定该点为波谷点。在判断出 CMIF 曲线中波峰和波谷位置后,假设波峰的个数为 $N$ ,对应的频率为 $\omega_i (i=1, 2, \dots, N)$ ,则对于每一个频率 $\omega_\alpha$ ,如其到左侧第一个波谷点处共有 $L_1$ 个频率点,到右侧第一个波谷点处共有 $L_2$ 个频率点,则可选择 $\omega_\alpha$ 附近的频率范围为 $(\omega_{\alpha-L_1/2}, \omega_{\alpha+L_1/2})$ ,对每个波峰点 $\omega_i$ 均以此方法选择,可抽取得到新的 FRF 数组。抽取后用以模态参数辨识的数据量减少了近 1/2,同时也提高了 FRF 数据的信噪比。在正交多项式模态参数辨识算法中的应用与验证。

### 3.1 CMIF 在参数辨识算法中的应用流程

模态参数辨识的方法有很多种,总体上可以大致分为时域法和频域法。Forsythe 正交多项式算法,是目前频域法中用途最为广泛的一种算法,Rechardson<sup>[15]</sup>在 1982 年首次提出后,相继有国内外多名学者对该算法进行了研究和改进<sup>[16-19]</sup>。Forsythe 正交多项式算法无需迭代处理,拟合精度较高,计算快速,但是缺点在与分子分母阶次(即模态数目)难以确定。本文在这里引入 CMIF 来辅助确定模态数目,并使用基于 CMIF 的 FRF 数据自动抽取算法对 FRF 数据进行抽取,从而有效地降低 Forsythe 正交多项式模态参数辨识算法的运算量,提高了计算结果的准确度。图 7 为改进后的 Forsythe 正交多项式模态参数辨识算法流程图。

### 3.2 仿真算例验证

$$H(s) = \sum_{i=1}^8 \frac{\omega_{di}^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{di} s + \omega_{di}^2}, \quad (14)$$

某系统的传递函数如公式(14)所示,其中 $\xi_1=0.2, \xi_2=0.18, \xi_3=0.16, \xi_4=0.14, \xi_5=0.12, \xi_6=0.10, \xi_7=0.08, \xi_8=0.06, \omega_{d1}=120 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d2}=200 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d3}=320 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d4}=400 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d5}=480 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d6}=560 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d7}=640 \pi \text{ rad/s}, \omega_{d8}=800 \pi \text{ rad/s}$ 。在无噪声,10% 白噪声两种情况下,利用 MATLAB 进行仿真计算可得到系统的频响函数,之后按照图 7 所示的流程进行模态拟合和参数辨识,抽取前后的频响函数曲线对比和 CMIF 指示结果如图 8 (a)、(b)所示。参数辨识结果对比如表 2 所示。在无噪声时,拟合频响函数曲线与原始频响函数曲线没有偏差,可以精确地辨识出系统的固有频率和阻尼比。使用平滑滤波后的 CMIF 曲线抗干扰性增强,能够很好地指示出系统模态的数目和位置。噪声比例为 10% 时,辨识出的固有频率和理论值存在误差极小,固有频率的最大相对误差为 4.28%,阻尼比的最大相对误差为 10.5%,均在可接受的范围内。

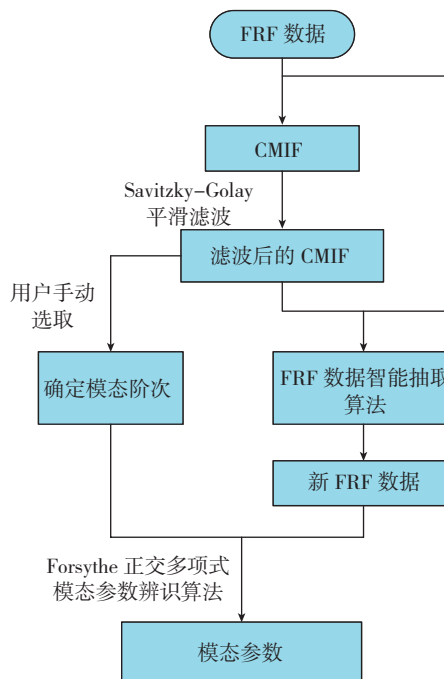


图7 改进后的模态参数辨识算法流程图  
Fig.7 Improved flow diagram of modal parameter identification algorithm

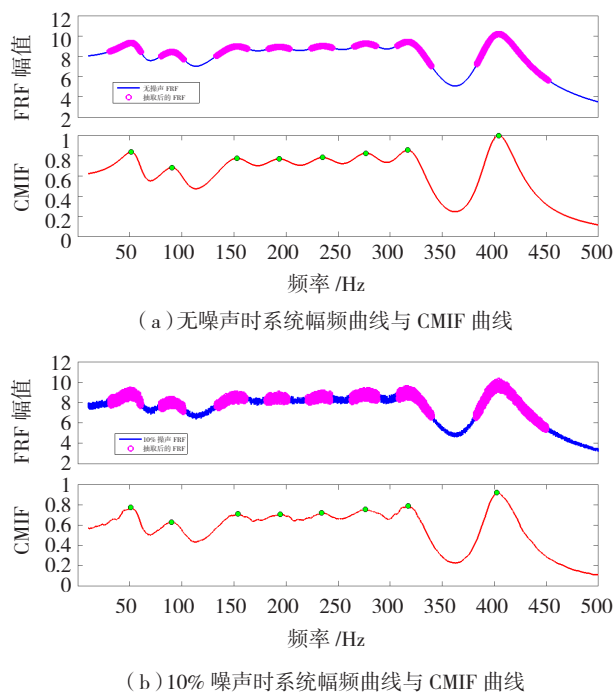


图8 抽取前后的频响函数曲线FRF和CMIF指示结果对比  
Fig.8 Comparison of amplitude FRF and CMIF curve

## 4 结论

(1) 噪声对 CMIF 的指示结果影响很大,实际使用 CMIF 确定系统模态数目和位置时,为避免指示出错误的虚假模态,必须对 CMIF 进行适当的平滑滤波处理。

表2 模态参数辨识结果

模态	理论值		无噪声				10% 噪声			
	频率 /Hz	阻尼 /%	频率		阻尼		频率		阻尼	
			数值 /Hz	误差 /%	数值 /%	误差 /%	数值 /Hz	误差 /%	数值 /%	误差 /%
1	60	20	60	0	20	0	61.41	2.35	22.1	10.5
2	100	18	100	0	18	0	101.49	1.49	18.8	4.44
3	160	16	160	0	16	0	163.35	2.09	16.7	4.19
4	200	14	200	0	14	0	195.62	2.19	13.9	0.7
5	240	12	240	0	12	0	245.29	2.20	12.4	3.33
6	280	10	280	0	10	0	286.31	2.25	9.5	5
7	320	8	320	0	8	0	330.86	3.39	7.9	1.25
8	400	6	400	0	6	0	417.13	4.28	6.2	3.33

(2) 使用 Savitzky-Golay 平滑滤波器对 CMIF 进行平滑滤波,既能够有效地避免指示出错误的虚假模态,又能够在平滑滤波的同时能够准确识别出真实模态的数目和位置。

(3) 基于 CMIF 的指示结果对原始 FRF 数据进行自动抽取能够有效地降低模态参数辨识算法的运算量,同时不会影响计算结果的准确度。

### 参考文献

- [1] BREITBACH E J. A semi-automatic modal survey test technique for complex aircraft and spacecraft structures// Proceedings of the 3rd ESA Testing Symposium.1973: 519-528.
- [2] BREITBACH E J. Recent developments in multiple input modal analysis. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1988, 110(4):478-484.
- [3] HUNT D L, VOLD H, PETERSON E L, et al. Optimal selection of excitation methods for enhanced modal testing. AIAA Paper, 1984:84-1068.
- [4] WILLIAMS R, CROWLEY J, VOLD H. The multivariate mode indicator function in modal analysis//Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, Orlando, Union College, 1985: 66-70.
- [5] SHIH C Y, TSUEI Y G, ALLEMANG R J, et al. Complex mode indication function and its applications to spatial domain parameter estimation. Mechanical Systems and Signal Processing, 1988, 2(4):367-377.
- [6] RADEŞ M. A comparison of some mode indicator functions. Mechanical Systems and Signal Processing, 1994, 8(4):459-474.
- [7] RADEŞ M, EWINS D J. The aggregate mode indicator function[C]//Proceedings of IMAC-XVIII Conference on Structural Dynamics. San Antonio, Texas, 2000: 201-207.
- [8] RADEŞ M, EWINS D J. The componentwise mode indicator function[C]//Proceedings of IMAC-XIX Conference on Structural Dynamics.

Kissimmee, Florida, 2001: 903-908.

[9] ALLEMANG R J, BROWN D L. A complete review of the complex mode indicator function with applications//Proceedings of ISMA2006 Int. Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 2006:3209-3246.

[10] RADEŞ M. Performance of various mode indicator functions. Shock and Vibration, 2010, 17:473-482.

[11] EWINS D J. Modal testing theory, practice & application. Baldock: Research Studies Press, 2000.

[12] PAPPAS R S, ELLIOTT K B. Consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(5):852-858.

[13] LUO J W, YING K, BAI J. Savitzky-Golay smoothing and differentiation filter for even number data. Signal Processing, 2005, 85:1429-1434.

[14] WIKIPEDIA. Savitzky Golay smoothing filter [EB/OL]. (2010-01-15) [2010-01-15]. [http://en.wikipedia.org/wiki/Savitzky-Golay\\_smoothing\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Savitzky-Golay_smoothing_filter).

[15] RICHARDSON M H, FORMENTI D L. Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials// Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference. Orlando: Union College, 1982: 167-181.

[16] Chen H H, XU F. A dual fitting algorithm for modal parameters identification. Mechanical System and Signal Processing, 2003, 17(3):713-721.

[17] 焦群英,陈奎孚. 整体正交多项式法识别模态参数的改进. 中国农业大学学报, 2003, 8(2):1-6.

[18] 王彤,张令弥. 有理分式正交多项式频响函数模态参数识别. 航空学报, 2003, 24(2):140-143.

[19] 杨毅青,刘强, JOKIN M. 基于正交多项式和稳定图的密集模态参数辨识. 振动、测试与诊断, 2010, 30(4):429-433.

(责编 宁军)