

基于队列的参数域T网格 Bézier分割方法*

陈甜甜,陈鲁,王伟,赵罡

(北京航空航天大学机械工程及自动化学院,北京 100191)

[摘要] 针对T样条曲面 Bézier 提取中的参数域 T 网格的 Bézier 分片问题,提出了一种基于队列的参数域 T 网格的 Bézier 分片算法。该算法首先通过延伸 T 型参数点对参数域网格进行切分,之后通过计算每个参数点所耦合的 T 样条混合函数非零区域对参数域网格进一步切分。上述切分过程只需借助一个队列数组即可实现。通过实例测试,验证了本算法的有效性。

关键词: T 样条曲面; 等几何分析; 贝奇尔提取; 队列

DOI: 10.16080/j.issn1671-833x.2017.07.016



陈甜甜

博士,硕士生导师,主要从事 CAD/CAM、复杂曲线曲面造型技术研究。

数值计算方法^[1]。它的核心在于将 CAD 建模工具和有限元求解方式结合起来,使几何模型与分析网格模型表达统一,弥补了几何模型与分析模型巨大差异的缺陷^[2]。基于此,等几何分析具有较高的效率和更精确的分析结果,目前已成功地应用于振动分析^[3-4]、流体力学^[5-6]、板壳^[7-8]以及电磁^[9]等领域。

非均匀有理 B 样条曲面(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)是应用较为广泛的一种 CAD 设计模型。一些学者对基于 NURBS 模型的等几何分析进行了研究,取得了一些成果。但 NURBS 模型严格的矩形拓扑限制使得其在进行等几何分析时依旧存在以下不足:首先,使用 NURBS 曲面表达拓扑结构比较复杂的模型时,不可避免地会出现多张 NURBS 曲面的裁剪和拼接,增大了等几何分析中网格划分的难度;其次, NURBS 曲面无法进行局部细化,因此分析者对分析模型的某个局部进行加密时,会不可避免地引入冗余

的控制顶点,从而降低计算效率。

Sederberg 等提出的 T 样条曲面(T-splines)为解决 NURBS 的不足提供了契机^[10-11]。相比较于 NURBS 曲面,T 样条曲面具有以下两个优点:(1)单张 T 样条曲面可表示拓扑结构比较复杂的模型^[12]。(2)局部细化^[13-15]。因此,T 样条曲面是一种比较适合于进行等几何分析的模型。

为了推动基于 T 样条曲面的等几何分析发展,Scott 等提出了 T 样条曲面的 Bézier 提取算法^[16]。Nguyen 将基于 Bézier 单元的等几何分析结果与传统的有限元分析进行了比较^[17]。之后,Scott 等又提出了带奇异点的 T 样条曲面的 Bézier 提取方法^[18]。

T 样条曲面的 Bézier 提取算法有以下两个关键步骤:(1)对参数域 T 网格进行 Bézier 分片,使得划分后的参数域网格所对应的空间曲面片(patch)的内部 C^∞ 连续。(2)求取 T 样条曲面每个混合函数所对应的 Bézier 提取矩阵。文献 [16] 以及

等几何分析(isogeometry analysis)是一种基于样条理论的

*基金项目: 国家青年科学基金项目(51305016)。

文献 [18] 对步骤 (2) 的具体实现过程进行了详细说明, 但都没有给出步骤 (1) 的具体实现方法。为此, 本文对参数域 T 网格的 Bézier 分片进行了研究, 给出了一种参数域 T 网格的 Bézier 分片算法。该算法有利于后续进一步实现 T 样条曲面的 Bézier 提取算法, 最终达到基于 T 样条曲面等几何分析的目的。

T 样条曲面的基本概念

T 样条曲面可看作 NURBS 曲面的一般化, 它允许控制顶点呈 T 型连接。本节将会对 T 样条曲面的基本概念进行简要介绍。

定义 1: T 样条曲面的控制网格 (T-mesh) 称为空间 T 网格, 它包含了 T 样条曲面的所有控制顶点空间位置信息以及拓扑连接信息。

定义 2: T 样条曲面上的控制顶点都对应一个参数点, 由于这些参数点连接而成的参数域网格与空间 T 网格同胚, 因此称该参数域网格为参数域 T 网格。

空间 T 网格与参数域 T 网格分别如图 1 (a) 和 (b) 所示, 第 13 号控制顶点对应于参数域上的 a_{13} 点。

T 样条曲面的计算表达式为:

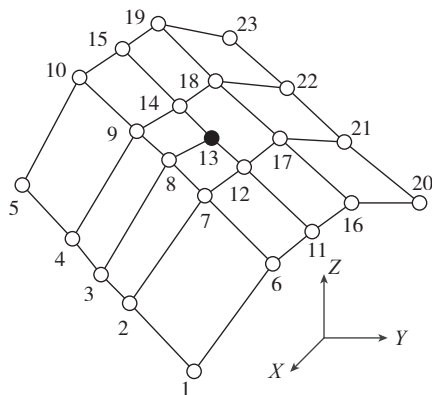
$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i p_i B_i(u, v)}{\sum_{i=1}^n \omega_i B_i(u, v)} \quad (1)$$

其中 $B_i(u, v) = N_{i,k}(u)N_{i,p}(v)$ 为控制顶点 p_i 所对应的混合函数; ω_i 为控制顶点 p_i 的权值; $N_{i,k}(u), N_{i,p}(v)$ 分别为 k 次及 p 次 B 样条基函数。T 样条曲面的具体计算过程见文献 [10]。

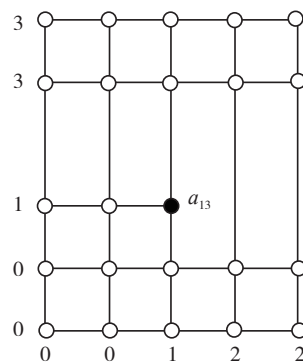
T 样条曲面的 Bézier 单元

T 样条曲面在计算过程中以参数域 T 网格上的面片作为最小单元, 但参数域 T 网格上的每个面片所对应的 T 样条曲面片 (patch) 不一定能用一张有理 Bézier 曲面表示, 这里以一个具体实例对该现象进行说明。

图 2 为一个双三次 T 样条曲面的参数域 T 网格。 $v_1 \sim v_6$ 为参数域 T



(a) 空间 T 网格



(b) 参数域 T 网格

图1 T样条曲面的空间T网格和参数域T网格

Fig.1 T-mesh in Cartesian space and parametric space

网格中的 6 个参数点, 它们所对应的控制顶点分别为 $p_1 \sim p_6$, s_1 为参数域 T 网格中的一个面片, 它包含 $v_2 \sim v_6$ 5 个参数点, 阴影区域为控制顶点 p_1 所对应的混合函数 $N_{1,3}(u)N_{1,3}(v)$ 的非零区域。由 B 样条基函数的可微性可知, 面片 s_1 所对应的 T 样条曲面片内部不能达到 C^∞ 连续, 而有理 Bézier 曲面的内部可以达到 C^∞ 连续。因此, 面片 s_1 所对应的 T 样条曲面片不能用一张有理 Bézier 曲面表示。

因此, 为了实现 T 样条曲面的 Bézier 提取, 必须首先将 T 样条曲面进行分割, 使得分割后的每个 T 样条曲面片的内部无限次可微, 而边界处则只能达到有限次可微, 称具备上述性质的 T 样条曲面片为 T 样条曲面的一个 Bézier 单元。

定义 3: T 样条曲面划分 Bézier 单元的过程称为 T 样条曲面的 Bézier 分割。

T 样条曲面的 Bézier 分割并不

是直接在 T 样条曲面上进行切分得到, 而是通过对参数域 T 网格进行分割而间接得到的。由 B 样条基函数的连续性可知, T 样条曲面会在混合函数的节点线所对应的空间曲线处连续性降低。因此, 只需要对参数域 T 网格按照 T 样条混合函数的节点线进行分割, 则可以间接实现 T 样条曲面的 Bézier 分割。

参数域 T 网格 Bézier 分割算法

定义 4: T 样条曲面在参数域 T 网格上间接实现 T 样条曲面 Bézier 分割的过程称为参数域 T 网格的 Bézier 分割。

图 3 为一个双三次 T 样条曲面参数域网格, $v_1 \sim v_5$ 为参数域 T 网格中的 5 个参数点, 它们所对应的控制顶点分别为 $p_1 \sim p_5$, $s_1 \sim s_7$ 为参数域 T 网格上的 7 个面片。其中控制顶点 p_2 所对应的混合函数 $B_2(u, v)$ 的节点线分布如图 4 所示。因此, 参数域

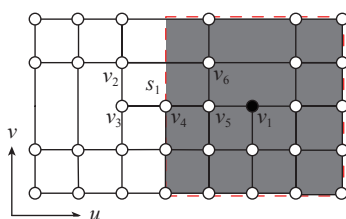


图2 参数域 T 网格1

Fig.2 T-mesh one in parametric space

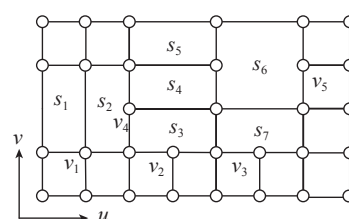


图3 参数域 T 网格2

Fig.3 T-mesh two in parametric space

上的面片至少需要切分成如图 5 所示的参数域网格。

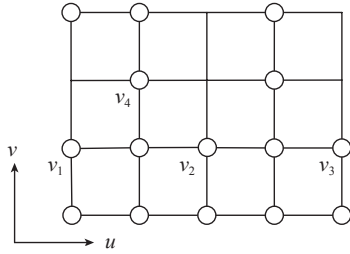


图4 混合函数 $B_2(u,v)$ 的节点线
Fig.4 Knot line of blending function $B_2(u,v)$

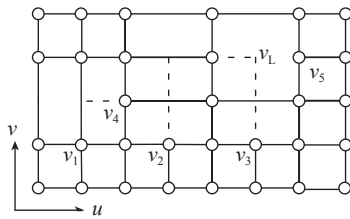


图5 混合函数 $B_2(u,v)$ 的节点线
分割效果图
Fig.5 T-mesh segmented by the knot line of blending function $B_2(u,v)$

显然,如果采用蛮力算法求取每一个控制顶点所对应的混合函数的节点线分布,最终虽能够实现参数域 T 网格的 Bézier 分割,但会出现很多重复的计算,并且在切分过程中可能出现如图 5 右上角所示的 L 型点。

为减少重复计算,并避免 L 型分割点的产生。本文给出了包含如下 4 个步骤的参数域 T 网格 Bézier 分割算法。

算法 1: 参数域 T 网格 Bézier 分割算法。

STEP1: 将参数域 T 网格中所有的 T 型参数点进行延伸,通过 T 型参数点的延伸将参数域 T 网格中面片进行切分。

STEP2: 遍历参数域上的所有参数点,对于每一个参数点,执行 STEP3 ~ STEP4。

STEP3: 计算当前参数点上所耦合的混合函数的非零区域。

STEP4: 如果 STEP3 中得到的非零区域不能完全覆盖参数域 T 网格中的某个面片,则切分该面片,否则

不切分该面片。

下面以如图 3 所示的参数域 T 网格为例对参数域 T 网格 Bézier 分割算法进行解释。

首先处理 T 型参数点,由于图 3 所示的参数域 T 网格中参数点 $v_2 \sim v_5$ 均为 T 型连接点,因此应首先对这些 T 型参数点进行延伸。如图 6 所示,参数点 v_2 以及 v_3 均向 v 正方向延伸两个 T 网格距离,而参数点 v_4 以及 v_5 均向 u 负方向延伸两个 T 网格。经过这个延伸过程,面片 s_3 切分成子面片 f_1 和 f_2 ; 面片 s_4 切分成子面片 f_3 和 f_4 ; 而面片 s_6 切分成子面片 f_5 、 f_6 、 f_7 以及 f_8 。

其次计算参数点所耦合的混合函数非零区域,如图 7 所示, v_1 为参数域 T 网格中的十字型参数点,参数点 v_1 所耦合的混合函数非零区域为见图 7 的阴影部分。

由于参数点 v_1 耦合的混合函数的非零区域完全覆盖了面片 f_1 和 f_3 , 因此这两个面片不需要切分。而面片 s_5 不能被参数点 v_1 所耦合的混合函数非零区域完全覆盖,因此需要将图 3 中的面片 s_5 切分为如图 8 所示的两个子面片 f_9 和 f_{10} 。

经过上述 4 个步骤,参数域 T 网

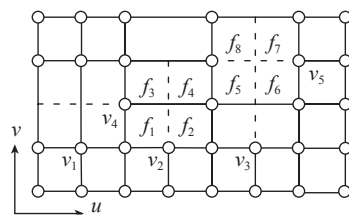


图6 T型参数点延伸后的参数域T网格
Fig.6 T-mesh generated by extending T-vertex

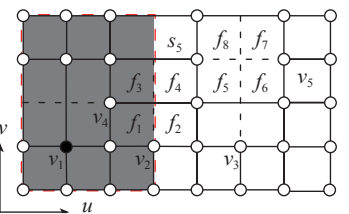


图7 参数点 v_1 所耦合的混合函数的非零区域
Fig.7 Nonzero region of the blending function corresponding to v_1

格中的每个面片所对应的 T 样条曲面均可以由一张有理 Bézier 曲面表示,也就实现了参数域 T 网格 Bézier 分割过程。

从上述实例中可以看到,参数域 T 网格 Bézier 分割算法可能将一个面片分成两个面片,如图 3 中的 s_3 ; 也可能分成四个面片,如图 3 中的 s_6 。事实上,如果参数域 T 网格比较复杂,还会出现一分为三、一分为六等多种情形。为了实现面片切分算法,本文使用如下所示的 BézierFace 结构体来处理面片切分问题。这个结构体中主要包含了每一个 BézierFace 范围信息,以及该 BézierFace 所属的面片的索引号信息。

```
struct BézierFace
{
    int faceindex; //BézierFace 所属面片的索引号
    double umin; //BézierFace 在 u 方向的最小值
    double umax; //BézierFace 在 u 方向的最大值
    double vmin; //BézierFace 在 v 方向的最小值
    double vmax; //BézierFace 在 v 方向的最大值
};
```

基于上述结构,可以使用算法 2 实现参数域 T 网格中面片的具体切分过程。

算法 2: 参数域 T 网格 Bézier 分割中的面片切分算法。

STEP1: 建立一个队列数组,该数组的大小与 T 样条曲面的参数域

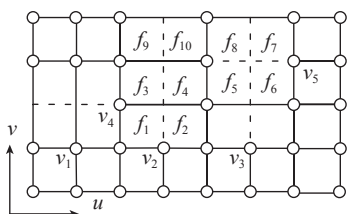


图8 参数域Bézier分割网格
Fig.8 Bézier segmentation of the T-mesh

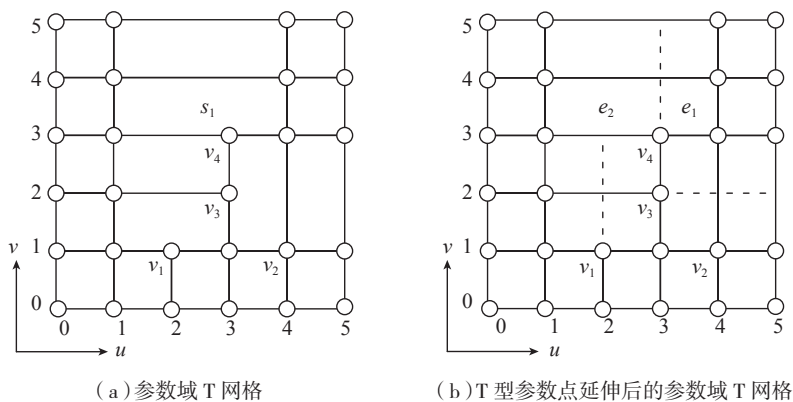


图9 参数域T网格及其延伸网格
Fig.9 T-mesh and its extending T-mesh

T 网格中的面片数一致,并使用与队列索引号相同的面片信息初始化该队列。

STEP2: 在执行算法 1 的过程中,如果出现面片需要切分的情形,则执行 STEP3~STEP4。

STEP3: 遍历与当前面片索引号相同的队列中的所有子面片,对于每一个子面片执行 STEP4。

STEP4: 如果当前子面片需要切分,则建立两个新面片并将位于队头的当前子面片执行出队操作,之后将新建两个面片分别执行入队操作;如果当前子面片不需要切分,则将位于队头的当前子面片先执行出队操作,随后执行入队操作。

下面以一个具体实例对算法 2 进行解释。图 8 为一个双三次 T 样条曲面参数域 T 网格。 v_1 、 v_3 以及 v_4 为参数域 T 网格中的 3 个 T 型参数点, s_1 为参数域 T 网格中的一个面片,其 u_{\min} 、 u_{\max} 、 v_{\min} 以及 v_{\max} 分别为 1、4、3 和 4。参数域 T 网格将 T 型参数点进行延伸后得到如图 9 所示的参数域延伸 T 网格。结合图 9 (a) 和 (b) 可知,由于 T 型参数点 v_4 的延伸,导致面片 s_1 被切分成面片 e_1 以及 e_2 。在具体程序实现时,首先建立两个新面片 e_1 和 e_2 ,其中新面片 e_1 的 u_{\min} 、 u_{\max} 、 v_{\min} 以及 v_{\max} 分别为 3、4、3 和 4; 新面片 e_2 的 u_{\min} 、 u_{\max} 、 v_{\min} 以及 v_{\max} 分别为 1、3、3 和 4。之后将队列中仅有的面片 s_1 进行出队操作,最后对新面片 e_1 和

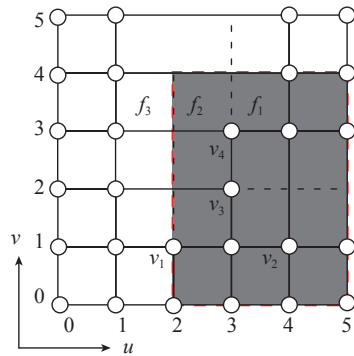


图10 参数域Bézier分割网格
Fig.10 Bézier segmentation of the T-mesh
 e_2 依次执行入队操作,此时队列中存在 e_1 和 e_2 两个面片。

图 10 中的阴影部分为十字型参数点 v_2 所耦合的混合函数的非零区域,这个区域完全覆盖面片 e_1 ,但并未完全覆盖图 9 (b) 面片 e_2 。因此,首先对队列中的 e_1 执行出队操作,接着对 e_1 执行入队操作,此时面片 e_1 由队头转到队尾,这个过程相当于建立了面片 f_1 。之后,队列中的第二个面片 e_2 ,显然需要进行切分,因此应新建两个面片 f_2 和 f_3 ,其中新面片 f_2 的 u_{\min} 、 u_{\max} 、 v_{\min} 以及 v_{\max} 分别为 2、3、3 和 4; 新面片 f_3 的 u_{\min} 、 u_{\max} 、 v_{\min} 以及 v_{\max} 分别为 1、2、3 和 4,之后对面片 e_2 进行出队操作,最后对面片 f_2 和 f_3 依次执行入队操作,此时队列中存在 f_1 、 f_2 及 f_3 3 个面片。

参数域 T 网格经过上述算法的分割后,每一个参数域面片均所对应的 T 样条曲面片均为一个 Bézier 单元,这就间接实现了 T 样条曲面的

Bézier 分割。

实例验证

为了验证本文所提出的参数域 T 网格的 Bézier 分割算法的有效性,在 Visual Studio 2012 软件开发平台上实现了 T 样条曲面的 Bézier 提取算法。该算法首先采用本文所提出的参数域 T 网格的 Bézier 分割算法对 T 样条模型的参数域 T 网格进行处理,之后采用文献 [16] 提出的混合函数 Bézier 提取矩阵求取算法对 T 样条模型进行 Bézier 提取,部分提取结果如图 11~ 图 13 所示。

这里,以 face 模型为例,对 T 样条模型以及 Bézier 提取模型的分割线进行说明。如图 11 (a) 所示,face 模型中的每一小曲面片均对应于参数域 T 网格中的一个面片,该模型经过 Bézier 提取算法之后,得到了如

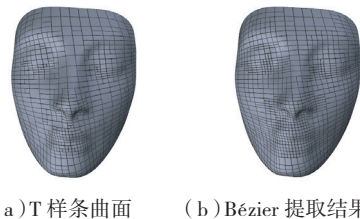


图11 face模型
Fig.11 Face model

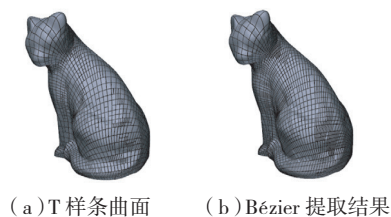


图12 cat模型
Fig.12 Cat model

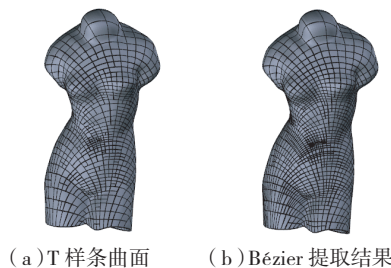


图13 venus模型
Fig.13 Venus model

图 11 (b) 所示的模型, 该模型上的每一个面片均为 T 样条曲面的一个 Bézier 单元, cat 模型与 venus 模型与之类似。上述实例也反映了本文算法的可行性。

结论

本文提出了一种参数域 T 网格的 Bézier 分片算法, 该算法只需要借助队列这一常见的数据结构就能间接实现 T 样条曲面的 Bézier 分割, 有利于后续完整的实现 T 样条曲面的 Bézier 提取算法。在此基础上, 未来可进一步研究基于 T 样条曲面 Bézier 单元的等几何分析算法。

参考文献

[1] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005,194(39): 4135-4195.

[2] 吴紫俊, 黄正东, 左兵权, 等. 等几何分析研究概述 [J]. *机械工程学报*, 2015, 51(5):114-129.

WU Zijun, HUANG Zhengdong, ZUO Bingquan, et al. Perspectives on isogeometric analysis[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(5):114-129.

[3] BAZILEVS Y, CALO V M, COTTRELL J A, et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows[J]. *Computer Methods*

in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1):173-201.

[4] AKKERMAN I, BAZILEVS Y, CALO V M, et al. The role of continuity in residual-based variational multiscale modeling of turbulence[J]. *Computational Mechanics*, 2008, 41(3): 371-378.

[5] BAZILEVS Y, CALO V M, ZHANG Y, et al. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow[J]. *Computational Mechanics*, 2006,38(4/5):310-322.

[6] ZHANG Y, BAZILEVS Y, GOSWAMI S, et al. Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007,196(29):2943-2959.

[7] BENSON D J, BAZILEVS Y, HSU M C, et al. Isogeometric shell analysis: the Reissner-Mindlin shell[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010,199(5):276-289.

[8] DORNISCH W, KLINKEL S, SIMEON B. Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013,253:491-504.

[9] BUFFA A, SANGALLI G, VÁZQUEZ R. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010,199(17):1143-1152.

[10] SEDERBERG T W, ZHENG J, BAKENOV A, et al. T-splines and T-NURCCs[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2003,22(3):477-484.

[11] SEDERBERG T W, CARDON D L, FINNIGAN G T, et al. T-spline simplification

and local refinement[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2004, 23(3): 276-283.

[12] GAN W F, FU J Z, SHEN H Y, et al. Five-axis tool path generation in CNC machining of T-spline surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 2014,52:51-63.

[13] DÖRFEL M R, JÜTTLER B, SIMEON B. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010,199(5): 264-275.

[14] SCOTT M A, LI X, SEDERBERG T W, et al. Local refinement of analysis-suitable T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012,213:206-222.

[15] WANG A, ZHAO G, LI Y D. An influence-knot set based new local refinement algorithm for T-spline surfaces[J]. *Expert Systems with Applications*, 2014,41(8):3915-3921.

[16] SCOTT M A, BORDEN M J, VERHOUSEL C V, et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-splines[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011,88(2):126-156.

[17] NGUYEN T N. Isogeometric finite element analysis based on Bézier extraction of NURBS and T-Splines[D]. Trondheim:Norwegian University of Science and Technology, 2011.

[18] SCOTT M A, SIMPSON R N, EVANS J A, et al. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013,254:197-221.

通讯作者: 陈甜甜, E-mail: chentt@buaa.edu.cn.

Bézier Segmentation of T-mesh in Parametric Space Based on Queue

CHEN Tiantian, CHEN Lu, WANG Wei, ZHAO Gang

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beihang University, Beijing 100191, China)

[ABSTRACT] Aiming at the problem of Bézier segmentation of T-mesh in parametric space, an algorithm based on queue was proposed. Firstly, T-mesh is segmented by the extension of T-vertices. Then a further segmentation is implemented by every nonzero region of blending function which is coupled to a vertex in T-mesh. An array of queue is used to realize the actual segmentation of the face in T-mesh. Some typical examples are illustrated to verify the validity of the algorithm at length.

Keywords: T-spline; Isogeometry analysis; Bézier extraction; Queue

(责编 孝丹)