

基于三阶龙格库塔法的铣削稳定性半解析法预测*

李忠群, 彭岳荣, 夏磊, 朱帆

(湖南工业大学机械工程学院, 株洲 412007)

[摘要] 针对使用再生颤振理论建立的铣削动力学模型, 提出了一种基于三阶龙格库塔法用于预测铣削稳定性的半解析方法。首先, 以状态空间方程的形式表示动力学微分方程; 其次, 利用三阶龙格库塔法推导出传递矩阵; 最后利用 Floquet 理论判断特定切削状态下的稳定性, 进而获得铣削稳定性叶瓣图。通过与半离散法的仿真结果进行对比发现, 基于三阶龙格库塔法的铣削稳定性求解方法具有更高的预测精度和计算效率。

关键词: 三阶龙格库塔法; 稳定性叶瓣图; Floquet 理论; 铣削加工

DOI:10.16080/j.issn1671-833x.2016.23/24.030



李忠群

博士, 湖南工业大学教授, 主要研究方向为数字化制造与装备技术、虚拟制造。

颤振是指发生在切削过程中的一种自激振动现象, 具有很大的危害性, 是制约切削加工质量和生产效率的首要因素。自从 Tobias^[1] 和

Tlusty^[2] 等提出有关颤振的基本模型以来, 众多学者致力于这一领域的研究, 并提出了一系列相关模型。在这些模型中, 再生效应被认为是引起切削颤振的最直接原因。

稳定性叶瓣图是一种通过动力学建模分析得到用于预测铣削是否稳定的图形, 利用该图形可以实现高效无颤振铣削^[1,3]。在铣削动力学建模与稳定性分析方面, Altintas 等提出了基于再生效应考虑时间周期的常微分方程^[4-6]。Budak 等提出了用于预测铣削稳定性的解析方法^[7], 它将铣削过程简化为二自由度系统, 并用 Fourier 级数的直流分量来表示动态铣削因子。Merdol 和 Altintas 通过考虑高次谐波的影响, 提出了用于求解铣削稳定性的多频率方法^[8]。Bayly 等^[9] 提出了一种基于时间有限元分析预测铣削稳定性方法, 同时该方法可以用来预测表面加工误差。Insperger 等^[10-11] 提出一种半离散方法 (SDM), 该方法后来被广泛用于评估其他预测铣削稳定性的方法。丁

汉等基于直接积分方案提出了铣削稳定性全离散法^[12-14]。李明震等通过对铣削系统的常微分方程的状态项、延迟项、微分项全部进行离散, 提出一种完全离散方法^[15]。笔者等采用四阶龙格库塔法求解给定初值的铣削动力学常微分方程^[16]。

上述方法各有其特点, 但均未同时解决好计算精度与效率的问题。为此, 本文提出了一种基于三阶龙格库塔法 (Three-order Runge-Kutta Method, RGKM-3) 的半离散解析方法来预测铣削稳定性, 旨在确保仿真精度的同时, 提高仿真效率。

铣削过程动力学建模

二自由度铣削系统的动力学模型可由如下微分方程描述^[1-2]:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = -a_p K_c(t)[q(t) - q(t-T)] \quad (1)$$

式中, M 、 C 、 K 、 $q(t)$ 和 a_p 分别表示系统的模态质量矩阵、模态阻尼矩阵、模态刚度矩阵、位移向量及轴向切深; T 为刀齿切削周期, $T=60$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51375160, 51375161); 国家科技重大专项资助项目 (2012ZX04011-011)。

($N\Omega$), N 为切削刃数, Ω 为主轴转速 (r/min); $\mathbf{K}_c(t)$ 表示随时间变化的切削力系数矩阵, 且有 $\mathbf{K}_c(t) = \mathbf{K}_c(t+T)$, $\mathbf{K}_c(t)$ 可表示为:

$$\mathbf{K}_c(t) = \begin{pmatrix} h_{xx}(t) & h_{xy}(t) \\ h_{yx}(t) & h_{yy}(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{aligned} h_{xx}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j) \sin(\phi_j) [K_l \cos(\phi_j) + K_r \sin(\phi_j)] \\ h_{xy}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j) \cos(\phi_j) [K_l \cos(\phi_j) + K_r \sin(\phi_j)] \\ h_{yx}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j) \sin(\phi_j) [-K_l \sin(\phi_j) + K_r \cos(\phi_j)] \\ h_{yy}(t) &= \sum_{j=1}^N g(\phi_j) \cos(\phi_j) [-K_l \sin(\phi_j) + K_r \cos(\phi_j)] \end{aligned}$$

式中, K_l 和 K_r 分别为切向切削力系数和径向切削力系数, $\phi_j(t)$ 是第 j 个齿的转角位置, 可以表示为:

$$\phi_j(t) = (2\pi\Omega/60)t + (j-1)2\pi/N \quad (3)$$

$g(\phi_j)$ 为单位阶跃函数, 当 $\phi_{st} \leq \phi_j \leq \phi_{ex}$, $g(\phi_j) = 1$; 否则, $g(\phi_j) = 0$. ϕ_{st} 、 ϕ_{ex} 分别表示切入角与切出角。对于顺铣, $\phi_{st} = 0$, $\phi_{ex} = \arccos(1 - 2a_e/D)$; 对于逆铣, $\phi_{st} = \arccos(2a_e/D - 1)$, $\phi_{ex} = \pi - a_e$ 为径向切深。

RGKM-3 求解铣削动力学微分方程

1 状态空间方程

考虑再生效应的铣削过程动力学方程由 n 维状态空间方程表示为:

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)x(t-T) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 为周期性因子矩阵, $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t+T)$; T 为时间周期, 对于单铣削过程来说 $T = \tau$, τ 是时滞因子, 它们可表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} - a_p \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_c(t) & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_p \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_c(t) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

2 三阶龙格库塔法算法 (RGKM-3)

使用 RGKM-3 求解式 (4) 时, 把周期 T 离散成 m 等份, 假设每等份的时长为 h , 即有 $T = mh$, 三阶龙格库塔的表达为:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}h(\mathbf{K}_1 + 4\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \\ \mathbf{K}_1 &= f(t_i, x_i) \\ \mathbf{K}_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}h\mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 &= f\left(x_i + h, x_i + h\mathbf{K}_1 + 2h\mathbf{K}_2\right) \end{aligned} \quad (6)$$

式中, x_i 表示 $x(ih)$, x_{i+1} 表示 $x(i+1)h$, t_i 表示 ih , i 是整数 ($0 \leq i \leq m$)。

为推导 RGKM-3, 采用两点拉格朗日插值, 因此中点值 $x(t_i + 0.5h - T)$ 可以用 $x(t_i + 0.5h - T) = 0.5[x(t_i - T) + x(t_i + h - T)]$ 表示。为了简化, $x(t_i + 0.5h - T)$ 用 $x_{i+1/2-m}$ 表示, 则 $x_{i+1/2-m} = 0.5(x_{i-m} + x_{i-m+1})$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}_i x_i + \mathbf{B}_i x_{i-m} \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{F}_{i,2} x_i + \mathbf{F}_{i-m,2} x_{i-m} + \mathbf{F}_{i+1-m,2} x_{i+1-m} \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{F}_{i,3} x_i + \mathbf{F}_{i-m,3} x_{i-m} + \mathbf{F}_{i+1-m,3} x_{i+1-m} \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{F}_{i,2} = \mathbf{A}_{i+1/2} + 0.5h\mathbf{A}_{i+1/2}$

$$\mathbf{F}_{i-m,2} = \mathbf{B}_{i+1/2} + 0.5h\mathbf{B}_{i+1/2}$$

$$\mathbf{F}_{i-m+1,2} = 0.5\mathbf{B}_{i+1/2}$$

$$\mathbf{F}_{i,3} = \mathbf{A}_{i+1} - h\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{A}_i + 2h\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{F}_{i,2}$$

$$\mathbf{F}_{i-m,3} = -h\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{B}_i + 2h\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{F}_{i-m,2}$$

$$\mathbf{F}_{i-m+1,3} = \mathbf{B}_{i+1} + 2h\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{F}_{i-m+1,2}$$

将式 (7) 代入式 (6) 有:

$$x_{i+1} = \mathbf{F}_i x_i + \mathbf{F}_{i-m} x_{i-m} + \mathbf{F}_{i+1-m} x_{i+1-m} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{F}_i = \mathbf{I} + \frac{h}{6}(\mathbf{A}_i + 4\mathbf{F}_{i,2} + \mathbf{F}_{i,3})$

$$\mathbf{F}_{i-m} = \frac{h}{6}(4\mathbf{F}_{i-m,2} + \mathbf{F}_{i-m,3} + \mathbf{B}_i)$$

$$\mathbf{F}_{i-m+1} = \frac{h}{6}(4\mathbf{F}_{i-m+1,2} + \mathbf{F}_{i-m+1,3})$$

为了获得传递矩阵, 定义一个 $n \times (m+2)$ 维的向量 y_i , y_i 表示为:

$$y_i = \text{col}(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i+1-m}, x_{i-m}) \quad (9)$$

因而离散化映射可以表示为:

$$y_{i+1} = \mathbf{C}_i y_i \quad (10)$$

相应的 \mathbf{C}_i 构建如下:

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{F}_{i+1-m} & \mathbf{F}_{i-m} \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

因此状态转移矩阵 Φ 可以构建如下: $y_m = \Phi y_0$ (11)

其中, $\Phi = \mathbf{C}_{m-1} \mathbf{C}_{m-2} \dots \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0$

根据 Floquet 理论, 当系统特征根传递矩阵 Φ 小于 1, 则系统稳定; 否则, 系统则处在颤振状态。

RGKM-3 获取稳定性叶瓣图算法及仿真结果分析

1 基于 RGKM-3 的二自由度铣削稳定性求解

对于具体的二自由度铣削系统而言, 其动力学模型可表示为:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta\omega_n & 0 \\ 0 & 2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \frac{a_p h_{xx}(t)}{m_t} & \frac{a_p h_{xy}(t)}{m_t} \\ \frac{a_p h_{yx}(t)}{m_t} & \omega_n^2 + \frac{a_p h_{yy}(t)}{m_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_p h_{xx}(t)}{m_t} & \frac{a_p h_{xy}(t)}{m_t} \\ \frac{a_p h_{yx}(t)}{m_t} & \frac{a_p h_{yy}(t)}{m_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-T) \\ y(t-T) \end{pmatrix}$$

式中, ω_n 、 ζ 、 m_t 分别为加工系统主模态的固有频率、阻尼比和模态质量, a_p 是轴向切深。为了获得式 (4) 的确切形式, 令 $\mathbf{X}(t) = [x(t), \dot{x}(t)]^T$, 式 (12) 通过柯西转换有:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{X}(t-T)$$

式中: $\mathbf{A}(t) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^2 - \frac{a_p h_{xx}(t)}{m_t} & -\frac{a_p h_{xy}(t)}{m_t} & -2\zeta\omega_n & 0 \\ -\frac{a_p h_{yx}(t)}{m_t} & -\omega_n^2 - \frac{a_p h_{yy}(t)}{m_t} & 0 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_p h_{xx}(t)}{m_t} & \frac{a_p h_{xy}(t)}{m_t} & 0 & 0 \\ \frac{a_p h_{yx}(t)}{m_t} & \frac{a_p h_{yy}(t)}{m_t} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

建立系数矩阵 \mathbf{C}_i , 应该满足离散映射: $v_{i+1} = \mathbf{C}_i v_i$

因 $\dot{x}(t-T)$ 和 $\dot{y}(t-T)$ 未出现在式 (12) 中, v_i 仅依赖于 $x_i, y_i, x_{i-m+1}, y_{i-m+1}, \dot{x}_i, \dot{y}_i$, 而与 $\dot{x}_{i-m+1}, \dot{y}_{i-m+1}, \dot{x}_{i-m}, \dot{y}_{i-m}$ 无关, 故只需构造一个 $(2m+4)$ 维向量:

$$v_i = \text{col}(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, x_{i-1}, y_{i-1}, \dots, x_{i-m}, y_{i-m})$$

另外参数矩阵 \mathbf{C}_i 应构建成 $(2m+4)$ 维矩阵见图 1。

2 颤振稳定性叶瓣图算法实现

所有使用离散法求解切削稳定性、构造稳定性叶瓣图的实现算法中, 需要对所有可用主轴转速和轴向切深区间进行离散处理, 然后针对每个离散点进行稳定性判定, 进而获得稳定性叶瓣图。因此, 获取稳定性叶瓣图的过程非常费时, 实用性不强。为此, 本文将采用二分法取代顺序法来确定临界稳定轴向切深。理论上说, 获取稳定性叶瓣图的速度将提高一个数量级。获取铣削加工稳定性叶瓣图的仿真流程如图 2 所示。

$$C_i = \begin{pmatrix} F_{i,11} & F_{i,12} & F_{i,13} & F_{i,14} & 0 & \cdots & 0 & F_{i-m+1,11} & F_{i-m+1,12} & F_{i-m,11} & F_{i-m,12} \\ F_{i,21} & F_{i,22} & F_{i,23} & F_{i,24} & 0 & \cdots & 0 & F_{i-m+1,21} & F_{i-m+1,22} & F_{i-m,21} & F_{i-m,22} \\ F_{i,31} & F_{i,32} & F_{i,33} & F_{i,34} & 0 & \cdots & 0 & F_{i-m+1,31} & F_{i-m+1,32} & F_{i-m,31} & F_{i-m,32} \\ F_{i,41} & F_{i,42} & F_{i,43} & F_{i,44} & 0 & \cdots & 0 & F_{i-m+1,41} & F_{i-m+1,42} & F_{i-m,41} & F_{i-m,42} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图1 (2m+4) 维矩阵

Fig.1 (2m+4)-dimensional matrix

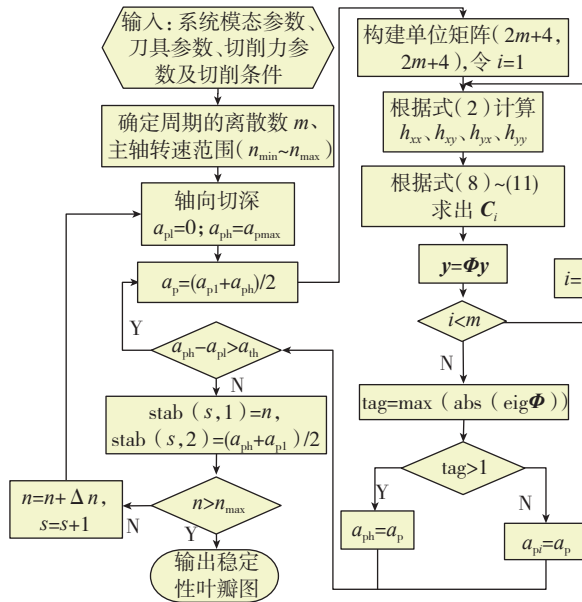


图2 基于三阶龙格库塔法预测铣削稳定性叶瓣图流程图

Fig.2 Flow chart of milling stability lobe based on three-order Runge Kutta method

3 仿真结果分析

采用 MATLAB 仿真实例来研究基于三阶龙格库塔法铣削稳定性预测效果。本文中, RGKM-3 所采用的仿真参数为固有频率 $w_n=5793\text{rad/s}$, 阻尼比 $\zeta=0.011$, 模态质量 $m_i=0.0399\text{kg}$, 切向切削力系数 $K_t=6.0 \times 10^8\text{N/m}^2$, 径向切削力系数 $K_r=2.0 \times 10^8\text{N/m}^2$ 。

图 3 所示为不同延迟周期离散数 ($m=40, 60, 100$ 和 200) 下, 采用 RGKM-3 在径向切深条件为 $a_r/D=0.1$ (D 为铣刀直径) 时获得的稳定性叶瓣图。可见, 随着 m 增大, 截断误差相应减小, 直到稳定性曲线接近周期离散数 ($m=200$)。

图 4 所示为不同径向切深条件下 ($a_r/D=0.05, 0.1, 0.5, 1.0$) 分别采用

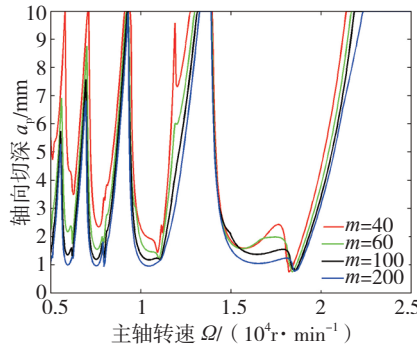


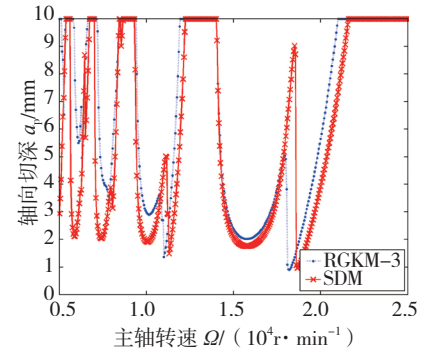
图3 周期离散数m对颤振稳定性影响的仿真结果

Fig.3 Effect of approximation parameter m on SLDs of milling process

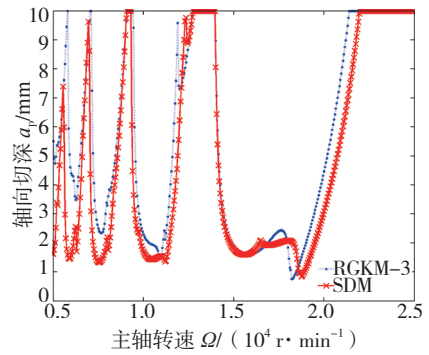
RGKM-3 和 SDM 获得的稳定性叶瓣图对比情况。由图 4 可知, 对于相同的周期离散数 (如 $m=40$), RGKM-3 比 SDM 具有更高的计算精度, 这说明 RGKM-3 能够更加准确地预测铣

削稳定性。

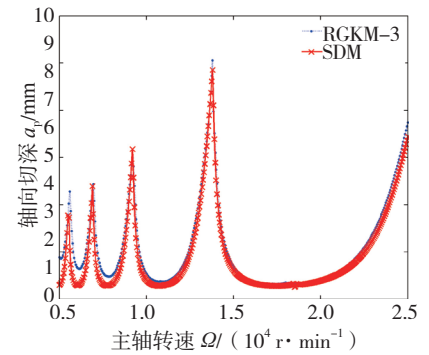
当 $m=40$ 时, 与 SDM 相比,



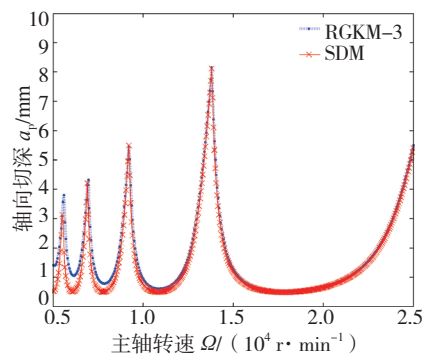
(a) $a_r/D=0.05$



(b) $a_r/D=0.1$



(c) $a_r/D=0.5$



(d) $a_r/D=1$

图4 采用SDM和RGKM-3获取稳定性叶瓣图对比

Fig.4 Comparison of SLDs obtained using SDM and RGKM-3

RGKM-3 的仿真计算时间更少(表 1),这也说明 RGKM-3 具有更高的计算效率。究其原因,主要是因为 SDM 需要计算一个指数矩阵,而这一部分的计算量十分庞大,耗费了大量的计算时间。采用 RGKM-3 时,由于采用了数值方法将微分部分离散化,避免了需要使用直接积分法而产生指数矩阵,大大减少了计算时间,提高了计算效率。

表1 获取稳定性叶瓣图所需计算时间/s

a_p/D	SDM	RGKM-3
0.05	114.448	48.096
0.1	116.436	50.078
0.5	120.792	53.540
1.0	134.483	71.759

结论

本文采用 RGKM-3 求解考虑再生效应的铣削过程动力学方程,推导出传递矩阵,再利用 Floquet 理论判断当前铣削状态的稳定性,并利用 Matlab 开发了相应的仿真程序,实现了铣削过程颤振稳定性的快速预测。通过与 SDM 的仿真结果分析比较发现, RGKM-3 具有更高的计算精度和更好的计算效率,特别适合小径向

切深条件下的颤振稳定性预测,对于指导诸如钛合金、镍合金等航空难加工材的高效铣削,具有较大的理论和实用价值。

参考文献

- [1] TOBIAS S A. Machine tool vibration[M]. London: Blackie, 1965.
- [2] KONIGSBERGER F, TLUSTY J. Machine tool structures-Vol. I: stability against chatter[M]. Elmsford: Pergamon Press, 1967.
- [3] TLUSTY J, ZATON W, ISMAIL F. Stability lobes in milling[J]. Annals of the CIRP, 1983,32(1):309-313.
- [4] ALTINTAS Y, WECK M. Chatter stability of metal cutting and grinding[J]. Annals of the CIRP, 2004,53(2):619-642.
- [5] BALACHANDRAN B. Nonlinear dynamics of milling processes[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical & Engineering Sciences, 2001,359:793-819.
- [6] WIERCIGROCH M, BUDAK E. Sources of nonlinearities chatter generation and suppression in metal cutting[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical & Engineering Sciences, 2001,359:663-693.
- [7] ALTINTAS Y, BUDAK E. Analytical prediction of stability lobes in milling[J]. Annals of the CIRP, 1995,44(1):357-362.
- [8] MERDOL D, ALTINTAS Y. Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling[J]. Transactions of ASME Journal of Manufacture Sciences and Engineering, 2004,126(3):459-466.
- [9] BAYLY P V, SCHMITZ T L, STEPAN G, et al. Effects of radial immersion and cutting direction on chatter instability in end-milling[C]. IMECE2002, New Orleans, Louisiana, 2002:361-363.
- [10] INSPERGER T, STÉPÁN G. Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004,61(1):117-141.
- [11] INSPERGER T, STÉPÁN G, TURI J. On the higher-order semi-discretizations for periodic delayed systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008,313:334-341.
- [12] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. A full-discretization method for milling stability prediction[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010,50(5):502-509.
- [13] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. Second-order full-discretization method for milling stability prediction[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010,50:658-662.
- [14] QUO Q, SUN Y, JIANG Y. On the accurate calculation of milling stability limits using third-order full-discretization method[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2012,62:61-66.
- [15] LI M Z, ZHANG G J, HUANG Y. Complete discretization scheme for milling stability prediction[J]. Nonlinear Dynamics, 2013,71:1187-1199.
- [16] LI Z Q, LIU Q. Solution and analysis of chatter stability for end milling in the time-domain[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008,21:169-178.

Prediction of Chatter Stability for Milling Process Using Semi-Analytical Approach Based on Three-Order Runge-Kutta Method

LI Zhongqun, PENG Yuerong, XIA Lei, ZHU Fan

(School of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China)

[ABSTRACT] In order to solve the dynamic model of milling process set up using regenerative chatter theory, a new semi-analytical approach based on three-order Runge-Kutta method was proposed in the paper. Firstly, the dynamic differential equation was represented by the form of the state space equation. Secondly, the state transition matrix was deduced using the three-order Runge-Kutta method. Lastly, the stability under current cutting condition was determined according to the Floquet theory, and as a result, the stability lobe diagram (SLD) of milling process can be obtained. It was shown that the proposed semi-analytical approach based on three-order Runge-Kutta method has higher convergence rate and computation accuracy, when compared with the simulation results of the classical semi-discretization method.

Keywords: Three-order Runge-Kutta method; Stability lobe diagram; Floquet theory; Milling process (责编 李丹)