

引文格式: 郑华林, 赵兴, 胡腾, 等. 基于多项式混沌的机床几何误差灵敏度分析[J]. 航空制造技术, 2024, 67(6): 24-31.

ZHENG Hualin, ZHAO Xing, HU Teng, et al. Geometric error sensitivity analysis of machine tool based on polynomial chaos[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2024, 67(6): 24-31.

# 基于多项式混沌的机床几何误差灵敏度分析\*

郑华林<sup>1,2</sup>, 赵兴<sup>1</sup>, 胡腾<sup>1,2</sup>, 魏小建<sup>1</sup>, 王小虎<sup>1</sup>

(1. 西南石油大学, 成都 610500;

2. 石油天然气装备技术四川省科技资源共享服务平台, 成都 610500)

[摘要] 为解决目前灵敏度分析方法普遍存在的样本需求量大且计算效率不高的问题, 提出了一种基于多项式混沌展开的全局灵敏度分析方法。首先, 以 AC 型双转台五轴数控机床为研究对象, 根据旋量理论建立了完备的空间误差模型。其次, 构建了机床几何误差的多项式混沌展开模型, 采用正交匹配追踪实现模型的稀疏化, 并给出了基于该方法的 Sobol 灵敏度指数。进而, 对五轴数控机床几何误差进行了实例分析, 测量并统计出 41 项误差的近似概率分布, 分析了影响各方向位姿误差分量的关键几何误差。通过与蒙特卡洛法和拉丁超立方方法进行对比, 多项式混沌展开方法的正确性得到验证, 且在不降低计算精度的前提下, 样本量从  $1 \times 10^5$  降低到  $1 \times 10^3$ , 计算时间分别减少 96.8% 和 98.1%, 计算效率显著提高。

关键词: 五轴数控机床; 几何误差; 灵敏度分析; 多项式混沌展开; 旋量理论

DOI: 10.16080/j.issn1671-833x.2024.06.024



郑华林

教授, 博士, 研究方向为智能制造工艺与装备、数字化设计与制造技术、精密与特种加工技术等。

随着我国工业技术的发展, 国防、航空、航天、汽车等诸多领域对机床加工精度的要求日益提高。机床的加工精度会受几何误差、热误差、切削力诱导误差等因素的综合影响。其中, 几何误差是由机床零部件制造和装配不精确等因素造成的, 在误差源中占有很大比例。由于几何误差项较多, 逐项测量并补偿全部误差成本很高, 有必要对其进行灵敏度分析<sup>[1]</sup>。从而降低补偿成本、提高效率, 对优化机床加工精度具有重要意义。

近年来, 数控机床几何误差灵敏度分析方法发展迅速。Cheng 等<sup>[2]</sup>通过旋量理论对五轴机床空间误差进行了建模, 并通过改进的 Morris 法对 37 项几何误差进行了全局灵敏度分析。Li 等<sup>[3]</sup>基于多体系统理论构建了五轴机床误差源与刀具位姿误

差之间的误差映射, 通过定义局部灵敏度指数、全局灵敏度指数和全局灵敏度波动指数对机床误差进行了灵敏度分析。Zou 等<sup>[4]</sup>基于蒙特卡洛法 (Monte Carlo simulation, MCS), 求解 Sobol 灵敏度指数, 量化了几何误差对加工精度的影响, 并根据分析结果对关键几何误差元素进行调整和分布。Fu 等<sup>[5]</sup>根据坐标系微分运动关系, 建立了机床各轴的几何误差灵敏度矩阵, 分析得出误差关键轴为 A 轴和 X 轴, 并验证其正确性。郭世杰等<sup>[6]</sup>采用拉丁超立方方法 (Latin hypercube sampling, LHS) 在整个参数空间内抽样, 利用 Spearman 系数进行几何误差相关性分析并辨识出影响机床精度的关键几何误差。王培桐等<sup>[7]</sup>采用截断傅里叶级数表征与位置有关的几何误差, 将求解灵敏

\* 基金项目: 四川省自然科学基金 (2022NSFSC2002); 四川省重大科技专项 (2020ZDZX0003)。

度指数转换为求取傅里叶幅值,该方法具有较好的鲁棒性。综上所述,目前机床的灵敏度分析方法主要有偏微分法、Morris法、MCS法、LHS法、傅里叶幅值法等,这些方法普遍样本需求量大且计算效率不高。

针对上述局限性,本文提出一种以多项式混沌展开(Polynomial chaos expansion, PCE)为理论基础的全局灵敏度分析方法。将双转台五轴数控机床作为研究对象,运用旋量理论建立空间误差模型,构建几何误差的PCE模型,通过Sobol指数表征41项误差的关键程度。最后,与MCS法和LHS法进行对比,验证其正确性与高效性。

## 1 五轴数控机床空间误差建模

### 1.1 运动链拓扑描述

本文的研究对象为AC型双转台五轴数控机床,其主要结构及运动

链拓扑如图1所示。其中,机床坐标系设于回转工作台的中心,即旋转轴轴线交点处。根据该机床运动链拓扑可知,旋转轴A、C彼此相邻并与床身构成工件运动链,平动轴X、Y、Z与床身构成刀具运动链。

### 1.2 几何误差描述

在几何误差综合作用下,刀具相对于工件的实际位姿与理想位姿间存在偏差。根据各几何误差与机床运动轴位置的相关性,可将其分为位置无关几何误差(Position independent geometric error, PIGEs)和位置相关几何误差(Position dependent geometric errors, PDGEs)。目前在国际学术界,针对旋转轴PIGEs有“绝对表示”和“相对表示”两种定义方法。由于“高”旋转轴的PIGEs会受“低”旋转轴运动的影响,绝对表示法对于双转台五轴机床并不适用。因此,本文采用相对表示法<sup>[8]</sup>,41项几何误差及其编号

如表1所示。

### 1.3 基于旋量理论的空间误差模型

根据旋量理论<sup>[9]</sup>,刚体的位姿变换运动可以由围绕空间某一直线的旋转运动以及沿该直线的平移运动合成。其运动学模型的基本单元是旋量运动 $e^{\hat{\xi}\theta}$ ,由旋量 $\xi$ 和运动量 $\theta$ 构成。

对于旋转轴,旋量 $\xi$ 可以表示为

$$\xi = [\mathbf{v} \ \boldsymbol{\omega}]^T \quad (1)$$

式中, $\mathbf{v}$ 为平动轴轴线方向的单位向量; $\boldsymbol{\omega}$ 为旋转轴轴线方向的单位向量。 $\mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ , $\mathbf{q}$ 为轴线上的任意一点。

旋转轴旋量运动的变换矩阵可以表示为

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta} & (\mathbf{I}_3 - e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v} \theta \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中, $e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta} = \mathbf{I}_3 + \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin \theta + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 (1 - \cos \theta)$ ;  $\mathbf{I}_3$ 为3阶单位矩阵; $\wedge$ 为叉乘算子; $\theta$

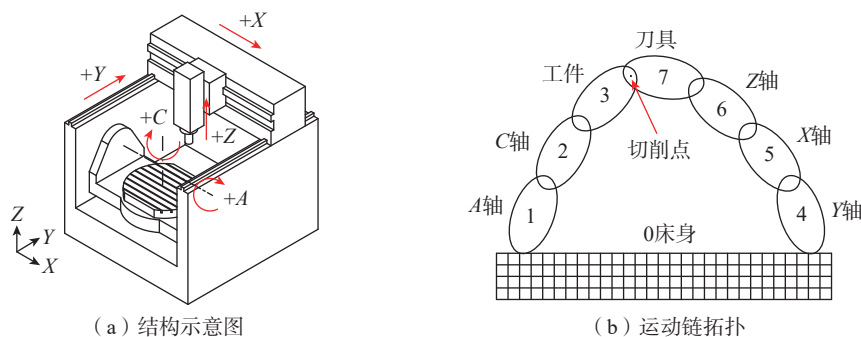


图1 双转台五轴数控机床结构示意图与运动链拓扑

Fig.1 Structure diagram and kinematic chain topology of double turntable five-axis CNC machine tool

表1 五轴数控机床几何误差及其编号

Table 1 Geometric errors and their numbering of five-axis CNC machine tool

运动轴		几何误差项	编号
PDGEs	X轴	$\delta_{xx}, \delta_{yx}, \delta_{zx}, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yx}, \epsilon_{zx}$	1, 2, 3, 4, 5, 6
	Y轴	$\delta_{yy}, \delta_{xy}, \delta_{zy}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{zy}$	7, 8, 9, 10, 11, 12
	Z轴	$\delta_{zz}, \delta_{xz}, \delta_{yz}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	13, 14, 15, 16, 17, 18
	A轴	$\delta_{xa}, \delta_{ya}, \delta_{za}, \epsilon_{xa}, \epsilon_{ya}, \epsilon_{za}$	19, 20, 21, 22, 23, 24
	C轴	$\delta_{xc}, \delta_{yc}, \delta_{zc}, \epsilon_{xc}, \epsilon_{yc}, \epsilon_{zc}$	25, 26, 27, 28, 29, 30
PIGEs	X/Y/Z轴	$S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}$	31, 32, 33
	A/C轴	$\delta_{xAM}, \delta_{yAM}, \delta_{zAM}, \alpha_{AM}, \beta_{AM}, \gamma_{AM}, \delta_{yCA}, \beta_{CA}$	34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41

为旋转轴转动量。

对于平动轴,旋量  $\xi$  可以表示为

$$\xi = [\nu \ 0_{1 \times 3}]^T \quad (3)$$

平动轴旋量运动的变换矩阵可以表示为

$$e^{\xi \cdot \theta} = \begin{bmatrix} I_3 & \theta \nu \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\theta$  为平动轴运动量。

结合图 1 描述的运动链拓扑,可得到刀具链位姿变换矩阵  $g_{bt}(\theta)$  和工件链位姿变换矩阵  $g_{bw}(\theta)$ , 即

$$g_{bt}(\theta) = e^{\xi_Y \cdot \theta_Y} \cdot e^{\xi_X \cdot \theta_X} \cdot e^{\xi_Z \cdot \theta_Z} \cdot g_{bt}(0) \quad (5)$$

$$g_{bw}(\theta) = e^{\xi_A \cdot \theta_A} \cdot e^{\xi_C \cdot \theta_C} \cdot g_{bw}(0) \quad (6)$$

式中,  $e^{\xi_j \cdot \theta_j}$  为  $j$  轴的变换矩阵;  $g_{bt}(0)$  和  $g_{bw}(0)$  分别为刀具和工件相对于机床坐标系的  $4 \times 4$  初始变换矩阵。

根据式 (5) 和 (6), 可得到理想状况下刀具相对于工件的位姿变换矩阵  $g_{wt}^i(\theta)$ , 即

$$g_{wt}^i(\theta) = g_{bw}^{-1}(0) \cdot e^{-\xi_C \cdot \theta_C} \cdot e^{-\xi_A \cdot \theta_A} \cdot e^{-\xi_Y \cdot \theta_Y} \cdot e^{-\xi_X \cdot \theta_X} \cdot e^{-\xi_Z \cdot \theta_Z} \cdot g_{bt}(0) \quad (7)$$

式中,  $e^{\xi_j \cdot \theta_j}$  为理想状况下  $j$  轴的变换矩阵。

结合表 1 和式 (7), 可得到实际状况下刀具相对于工件的位姿变换矩阵  $g_{wt}^r(\theta)$ , 即

$$g_{wt}^r(\theta) = g_{bw}^{-1}(0) \cdot e^{-\xi_C^r \cdot \theta_C} \cdot e^{-\xi_A^r \cdot \theta_A} \cdot e^{-\xi_Y^r \cdot \theta_Y} \cdot e^{-\xi_X^r \cdot \theta_X} \cdot e^{-\xi_Z^r \cdot \theta_Z} \cdot g_{bt}(0) \quad (8)$$

式中,  $e^{\xi_j^r \cdot \theta_j}$  为实际状况下  $j$  轴的位姿变换矩阵, 以  $A$  轴为例

$$e^{-\xi_A^r \cdot \theta_A} = e^{-\xi_A^1 \cdot \theta_A} \cdot e^{-\xi_A^D \cdot \theta_A} \cdot e^{-\xi_A^i \cdot \theta_A} \quad (9)$$

式中,  $e^{\xi_A^1 \cdot \theta_A} = e^{\xi_{\delta_{xAM}} \cdot \delta_{xAM}} \cdot e^{\xi_{\delta_{yAM}} \cdot \delta_{yAM}} \cdot e^{\xi_{\delta_{zAM}} \cdot \delta_{zAM}} \cdot e^{\xi_{\alpha_{AM}} \cdot \alpha_{AM}} \cdot e^{\xi_{\beta_{AM}} \cdot \beta_{AM}} \cdot e^{\xi_{\gamma_{AM}} \cdot \gamma_{AM}}$  为  $A$  轴 PIGEs 变换矩阵;  $e^{\xi_A^D \cdot \theta_A} = e^{\xi_{\delta_{xa}} \cdot \delta_{xa}} \cdot e^{\xi_{\delta_{ya}} \cdot \delta_{ya}} \cdot e^{\xi_{\delta_{za}} \cdot \delta_{za}} \cdot e^{\xi_{e_{xa}} \cdot e_{xa}} \cdot e^{\xi_{e_{ya}} \cdot e_{ya}} \cdot e^{\xi_{e_{za}} \cdot e_{za}}$  为  $A$  轴 PDGEs 变换矩阵。

由式 (7) 和 (8) 可得到五轴数控机床的位姿误差矩阵  $E$ , 即

$$E = g_{wt}^r(\theta) - g_{wt}^i(\theta) \quad (10)$$

位姿误差矩阵中包含位置误差和姿态误差, 各个方向的位置误差分量  $P_X, P_Y, P_Z$  为

$$[P_X, P_Y, P_Z, 0]^T = E \cdot [0, 0, 0, 1]^T \quad (11)$$

各个方向的姿态误差分量  $V_X, V_Y, V_Z$  为

$$[V_X, V_Y, V_Z, 0]^T = E \cdot [0, 0, 0, 1]^T \quad (12)$$

## 2 基于 PCE 的全局灵敏度分析方法

### 2.1 多项式混沌展开模型

多项式混沌展开最早由 Wiener<sup>[10]</sup> 提出, 用于研究 Brown 运动; Sudret<sup>[11]</sup> 后续将 PCE 应用到灵敏度分析中。其基本原理是将含有  $N$  维随机输入变量的响应函数  $Y=M(x)$ , 用一组关于变量  $x$  的多项式混沌展开模型表示

$$Y = M(x) = \sum_{b=0}^{\infty} y_b \psi_b(x) \quad (13)$$

式中,  $\psi_b(x)$  为正交的多项式基底, 其最优类型取决于变量的分布函数<sup>[12]</sup>;  $y_b$  为多项式基底对应的系数。

系数的求解是 PCE 方法的关键, 一般利用最小二乘回归求解。

$$\hat{y} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (14)$$

式中,  $A$  为回归矩阵, 包含回归样本所对应的多项式基底;  $\hat{y}$  为多项式系数构成的列向量。

在实际工程应用中, 通常会对式 (13) 进行截断。当最高阶次为  $p$  阶时, PCE 模型可近似为

$$Y = M(x) \approx \sum_{b=0}^p y_b \psi_b(x) \quad (15)$$

式中,  $P$  为截断近似保留的多项式总项数, 可由式 (16) 确定。

$$P = \frac{(N+p)!}{N!p!} - 1 \quad (16)$$

不难看出, PCE 方法的计算量会随着输入变量维数的增多呈阶乘增长, 高维下存在“维数灾难”问题。该问题可通过对 PCE 模型进行稀疏化来解决, 其思想是通过去除模型中对输出响应影响不大的正交多项式项来减少多项式系数的个数, 从而降低计算量。根据这一思想, 式 (14)

可以转换为求解多项式系数向量中非零元素最少的优化问题。

$$\hat{y} = \arg \min \|y\|_0 \text{ s.t. } \|Y - Ay\|_2 \leq \varepsilon \quad (17)$$

式中,  $\varepsilon$  为允许容差。

直接求解式 (17) 是一个 NP-hard 难题, 为了以可接受的计算成本获得近似的最稀疏解, 可采取一系列重构算法。其中, 正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP) 具有计算成本低、收敛速度快、适合交叉验证等优势, 本文使用该方法实现多项式系数的快速求解。

### 2.2 基于 OMP 的多项式系数求解

正交匹配追踪由 Pati 等<sup>[13]</sup> 提出, 其工作原理是在  $A$  矩阵中检索与当前残差最相关的多项式基底, 并将其添加到已有的索引集中, 通过最小二乘法更新相应的多项式系数, 不断迭代, 直至残差降至指定的容差范围内, 算法流程如图 2 所示。

由于在每一个迭代步, OMP 都寻找能使残差下降最快的多项式基底, 因此能够快速求解多项式系数。

### 2.3 基于 PCE 的全局灵敏度指数

基于方差分解的 Sobol 灵敏度指数<sup>[14]</sup> 因简单有效而得到了广泛应用, 可通过多项式系数直接得到。根据该方法, 可将含有  $N$  维随机输入变量的响应函数  $Y=M(x)$ , 唯一地分解成  $2^N$  个子函数之和, 即

$$Y = M(x) = M_0 + \sum_{i=1}^N M_i(x_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} M_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) + \dots + M_{1, 2, \dots, N}(x_1, \dots, x_N) \quad (18)$$

式中,  $s=1, 2, \dots, N$ ;  $M_0$  为 0 阶常数值;  $M_i(x_i)$  为与  $x_i$  有关的 1 阶子函数;  $M_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$  为与  $x_{i_1}$  和  $x_{i_2}$  有关的 2 阶子函数;  $M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$  为与  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  有关的  $s$  阶子函数;  $M_{1, 2, \dots, N}(x_1, \dots, x_N)$  为与所有输入变量有关的  $N$  阶子函数。

对式 (18) 等式两边取方差, 可得

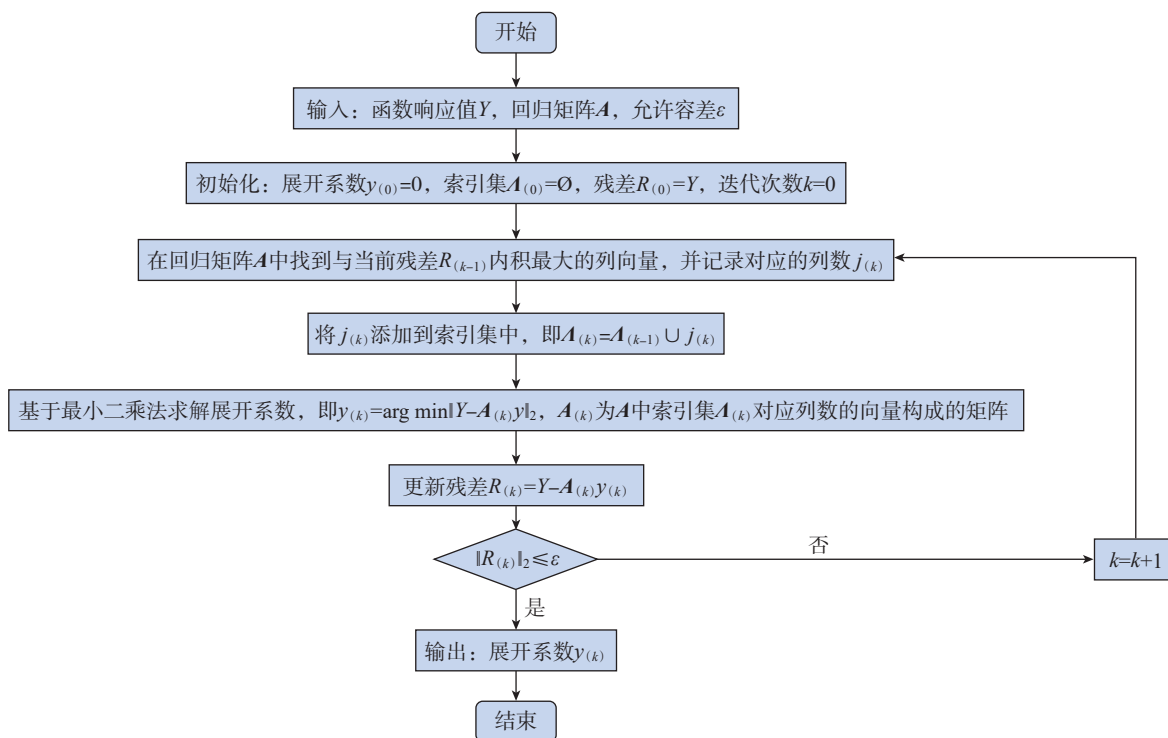


图2 OMP 算法流程图

Fig.2 Flowchart of OMP algorithm

$$D[M(x)] = \sum_{i=1}^N D_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} D_{i_1, i_2} + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} D_{i_1, \dots, i_s} + \dots + D_{1, 2, \dots, N} \quad (19)$$

可以看出,子函数的方差表征了不同单个输入及其相互作用对输出响应方差的贡献。因此,变量  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  的 Sobol 灵敏度指数被定义为

$$S_{i_1, \dots, i_s} = D_{i_1, \dots, i_s} / D[M(x)] \quad (20)$$

再对截断后的 PCE 模型(式(15))进行改写,可得

$$Y = M(x) \approx y_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha \in \Omega_i} y_\alpha \psi_\alpha(x_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \sum_{\alpha \in \Omega_{i_1, i_2}} y_\alpha \psi_\alpha(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} \sum_{\alpha \in \Omega_{i_1, \dots, i_s}} y_\alpha \psi_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) + \dots + \sum_{\alpha \in \Omega_{1, \dots, N}} y_\alpha \psi_\alpha(x_1, \dots, x_N) \quad (21)$$

式中,  $\Omega_{i_1, \dots, i_s} = \{\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) | \alpha_u = 0 \Leftrightarrow u \notin (i_1, \dots, i_s), \forall u = 1, \dots, N\}$  为包含  $\alpha$  中所有非 0 元素的集合。

对比式(18)和(21)可知,

Sobol 分解式中变量  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  的  $s$  阶子函数就是 PCE 模型中含相同变量的  $s$  阶正交多项式之和,即

$$M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = \sum_{\alpha \in \Omega_{i_1, \dots, i_s}} y_\alpha \psi_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \quad (22)$$

由此,结合式(20)和(22)就可得到基于 PCE 的 Sobol 灵敏度指数,即

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{D[M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})]}{D[M(x)]} = \frac{E \left[ \left( \sum_{\alpha \in \Omega_{i_1, \dots, i_s}} y_\alpha \psi_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \right)^2 \right]}{E \left[ \left( \sum_{b=0}^P y_b \psi_b(x) \right)^2 \right]} = \frac{\sum_{\alpha \in \Omega_{i_1, \dots, i_s}} y_\alpha^2 E[\psi_\alpha^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})]}{\sum_{b=0}^P y_b^2 E[\psi_b^2(x)]} \quad (23)$$

### 3 五轴数控机床几何误差全局灵敏度分析实例

#### 3.1 几何误差测量试验

为获得几何误差的概率分布,

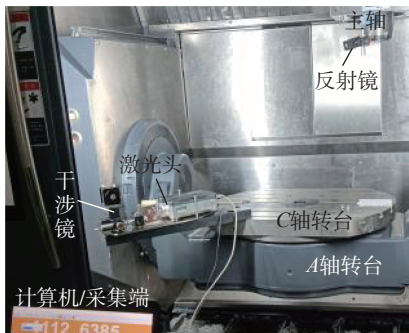
基于四川普什宁江机床有限公司生产的 VMC80IV 型五轴数控机床搭建试验平台,如图 3 所示。选择 Renishaw XL-80 激光干涉仪作为测量仪器,运用“15 线法<sup>[15]</sup>”测量机床平动轴几何误差;再利用 Renishaw QC20-W 球杆仪,依据 Tsutsumi 等<sup>[16]</sup>提出的策略测量机床旋转轴几何误差,重复进行多次试验。期间,测试环境保持  $(20 \pm 0.5)^\circ\text{C}$  恒温,以抑制机床热致空间误差对测试结果的影响。辨识并统计测量数据,可以得到各个误差的近似概率分布。结果表明,41 项几何误差服从正态分布,对误差范围进行合理缩放后,取位置误差范围为  $\pm 15 \mu\text{m}$ ,角度误差范围为  $\pm 10''$ 。

#### 3.2 基于 PCE 的全局灵敏度分析

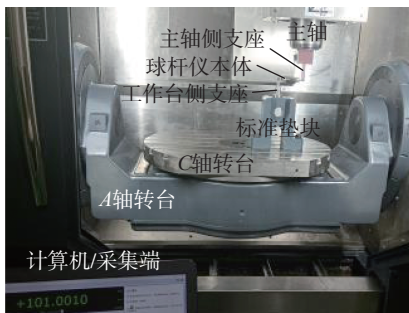
在灵敏度分析前,首先要确定几何误差采样测试点。VMC80IV 型机床 X 轴、Y 轴和 Z 轴的行程分别为  $\pm 400 \text{ mm}$ 、 $\pm 425 \text{ mm}$  和  $\pm 275 \text{ mm}$ , C 轴的回转范围为  $0 \sim 360^\circ$ , A 轴的摆

角范围为 $-130^{\circ}\sim+130^{\circ}$ 。将机床的工作空间沿对角线划分,并在每条对角线上等距取5个点作为测试点,如图4所示。这样选取的测试点适用于全尺寸的被加工件,且接近实际工作空间附近,位于机床常用的坐标范围内。越接近工作空间中心,越为常加工区域,测试点越密集,与实际加工的逻辑相符,在这些点进行灵敏度分析将得到更有意义的结果。

借助 UQLab<sup>[17]</sup> 编程构建几何



(a) 平动轴误差测量试验平台



(b) 旋转轴误差测量试验平台

图3 几何误差测量试验平台

Fig.3 Experimental platform of geometric errors measurement

误差的PCE模型。多项式基底选择 Hermite 正交多项式,根据 Cameron-Martin 理论<sup>[18]</sup>,其对服从正态分布的输入变量具有指数收敛速度。模型的最高阶次和样本量可通过收敛性测试确定,经过测试,取阶次 $p=3$ ,样本量 $m=1 \times 10^3$ 。采用OMP求解多项式系数,再通过 Sobol 指数表征几何误差对各方向位姿误差分量的影响程度。由于几何误差相对较小,且误差项之间具有低耦合性,一阶灵敏度与总灵敏度结果相差不大。因此,本文仅讨论总灵敏度指数,归一化结果如图5和6所示。

将灵敏度指数大于0.05(大约是平均灵敏度指数的两倍)的误差项作为关键几何误差。根据图5可知,影响X方向位置误差的关键几何误差为 $\delta_{xc}$ 、 $\delta_{ya}$ 、 $\delta_{yAM}$ ;对Y方向位置误差影响最大的为 $\delta_{yc}$ 和 $\delta_{yCA}$ ,此外, $\delta_{xx}$ 、 $\delta_{xy}$ 、 $\delta_{xz}$ 、 $\delta_{xa}$ 、 $\delta_{xAM}$ 也有较大影响;Z方向上

影响最大的为 $\delta_{za}$ 、 $\delta_{zc}$ 、 $\delta_{zAM}$ ,此外, $\delta_{yx}$ 、 $\delta_{yy}$ 、 $\delta_{yz}$ 、 $\epsilon_{xc}$ 的影响也不容忽视。从分析结果中不难发现,位置误差的影响要明显超过角度误差,而旋转轴的影响要超过平动轴,PIGEs和PDGEs的影响差别不大。

根据图6可知,影响X方向姿态误差最关键的几何误差为 $\epsilon_{yx}$ 、 $\epsilon_{yy}$ 、 $\epsilon_{yz}$ 、 $S_{xz}$ ,此外, $\epsilon_{za}$ 、 $\epsilon_{zc}$ 、 $\gamma_{AM}$ 、 $\epsilon_{yc}$ 、 $\beta_{CA}$ 也有较大影响;Y方向上的关键几何误差除 $\epsilon_{yc}$ 和 $\beta_{CA}$ 外,与X方向完全相同,且影响权重更高;对Z方向影响最大的几何误差为 $\epsilon_{xz}$ 、 $\epsilon_{xy}$ 、 $\epsilon_{xz}$ 、 $\epsilon_{xa}$ 、 $S_{yz}$ 、 $\alpha_{AM}$ ,同时 $\epsilon_{yc}$ 和 $\beta_{CA}$ 也不容忽视。可以看出,对姿态误差影响较大的全部都是角度误差,旋转轴和平动轴的影响差别不大。

### 3.3 灵敏度分析方法对比与验证

为验证本文方法的正确性与高效性,与MCS法和LHS法进行对比。这两种方法是目前灵敏度分析的常用方法,且都需要大规模采样,以样本量为 $1 \times 10^5$ 的结果作为验证标准。3种方法所得的关键几何误差及其灵敏度指数如表2所示。不难看出,3种方法得到的关键误差完全相同,且灵敏度指数接近,最大相对误差不超过5%。因此,本文方法的正确性得到验证。

此外,对3种方法分别进行收敛性能测试。以X、Y、Z方向上的最关键的几何误差 $\delta_{xc}$ 、 $\delta_{yc}$ 、 $\delta_{za}$ 为例,测试在不同采样规模下的收敛过程,并用

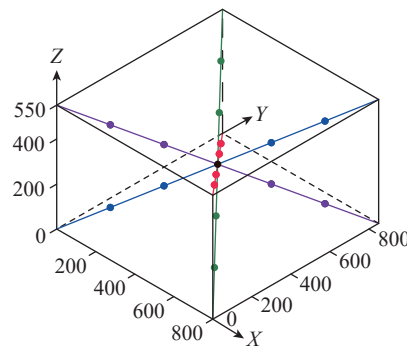
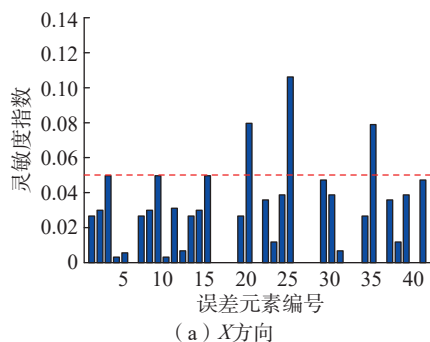
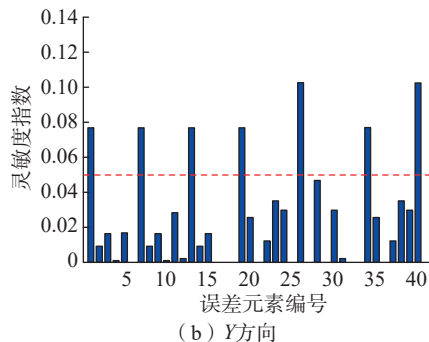


图4 机床空间测试点分布(mm)

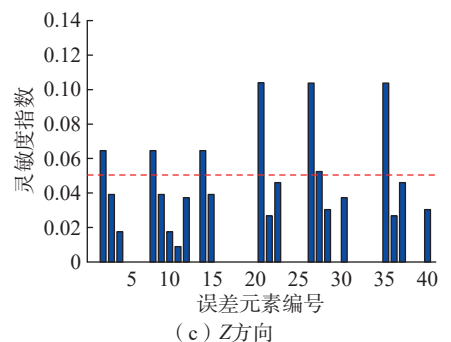
Fig.4 Spatial test points distribution of machine tool (mm)



(a) X方向



(b) Y方向



(c) Z方向

图5 位置误差全局灵敏度分析结果

Fig.5 Global sensitivity analysis results of position error

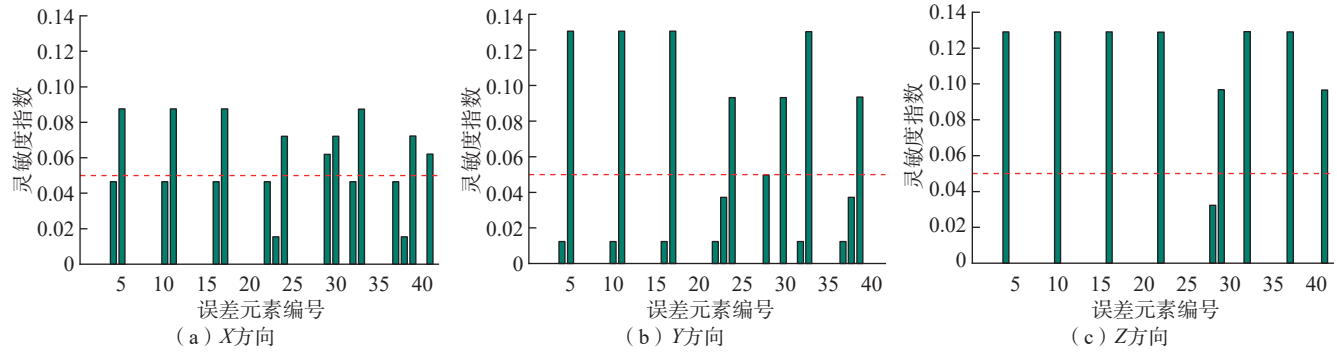


图6 姿态误差全局灵敏度分析结果

Fig.6 Global sensitivity analysis results of attitude error

表2 关键几何误差灵敏度指数对比

Table 2 Comparison of sensitivity index for key geometric errors

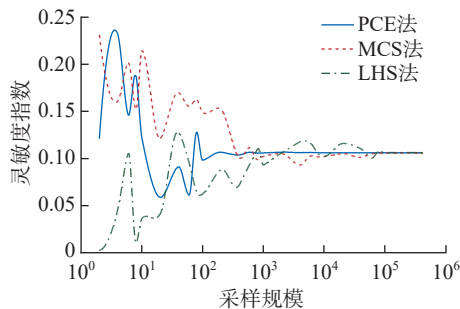
误差方向	位置误差				姿态误差			
	关键几何误差	PCE 法灵敏度指数	MCS 法灵敏度指数	LHS 法灵敏度指数	关键几何误差	PCE 法灵敏度指数	MCS 法灵敏度指数	LHS 法灵敏度指数
X 方向	—	—	—	—	$\varepsilon_{yx}$	0.0876	0.0861	0.0889
	—	—	—	—	$\varepsilon_{yy}$	0.0876	0.0876	0.0882
	—	—	—	—	$\varepsilon_{yz}$	0.0876	0.0909	0.0903
	$\delta_{ya}$	0.0797	0.0802	0.0771	$\varepsilon_{za}$	0.0721	0.072	0.0701
	$\delta_{xc}$	0.1062	0.1059	0.1060	$\varepsilon_{yc}$	0.0619	0.0604	0.0618
	$\delta_{yAM}$	0.0789	0.0795	0.0805	$\varepsilon_{zc}$	0.0721	0.0733	0.0716
	—	—	—	—	$S_{zx}$	0.0874	0.0856	0.0856
	—	—	—	—	$\gamma_{AM}$	0.0723	0.0732	0.0734
	—	—	—	—	$\beta_{CA}$	0.0620	0.0636	0.0612
Y 方向	$\delta_{xx}$	0.0769	0.0793	0.0758	$\varepsilon_{yx}$	0.1305	0.1288	0.1299
	$\delta_{yy}$	0.0769	0.0800	0.0757	$\varepsilon_{yy}$	0.1305	0.1308	0.1300
	$\delta_{xz}$	0.0769	0.0766	0.0761	$\varepsilon_{yz}$	0.1305	0.1350	0.1292
	$\delta_{xa}$	0.0768	0.0779	0.0755	$\varepsilon_{za}$	0.0933	0.0931	0.0934
	$\delta_{yc}$	0.1026	0.1041	0.1046	$\varepsilon_{zc}$	0.0933	0.0947	0.0930
	$\delta_{xAM}$	0.0770	0.0743	0.0782	$S_{zx}$	0.1302	0.1275	0.1285
	$\delta_{yCA}$	0.1025	0.1011	0.1031	$\gamma_{AM}$	0.0935	0.0946	0.0929
Z 方向	$\delta_{yx}$	0.0646	0.0651	0.0633	$\varepsilon_{xx}$	0.1290	0.1284	0.1280
	$\delta_{yy}$	0.0646	0.0657	0.0629	$\varepsilon_{xy}$	0.1290	0.1279	0.1278
	$\delta_{yz}$	0.0646	0.0657	0.0631	$\varepsilon_{zx}$	0.1290	0.1312	0.1285
	$\delta_{za}$	0.1039	0.1032	0.1025	$\varepsilon_{xa}$	0.1289	0.1249	0.1266
	$\delta_{zc}$	0.1038	0.1048	0.1034	$S_{yz}$	0.0968	0.0949	0.0972
	$\varepsilon_{xc}$	0.0524	0.0496	0.0547	$\varepsilon_{yc}$	0.1292	0.1270	0.1280
	$\delta_{zAM}$	0.1037	0.1038	0.1031	$\alpha_{AM}$	0.1291	0.1362	0.1354
	—	—	—	—	$\beta_{CA}$	0.0966	0.0986	0.0971

波动率  $R$  来量化灵敏度指数的波动状况,即

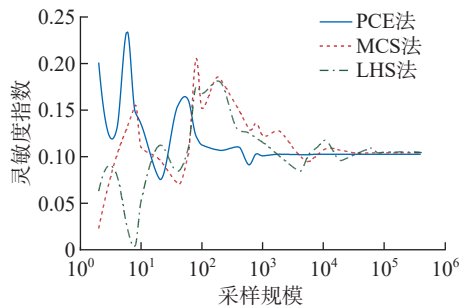
$$R = \frac{|S_{l+1} - S_l|}{S_l} \times 100\% \quad (24)$$

式中,  $l$  为测试样本量。

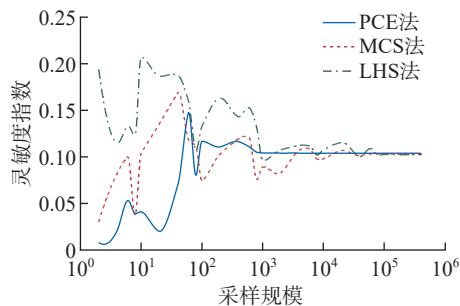
以  $R \leq 3\%$  作为收敛标准。根据图 7 所示结果,误差  $\delta_{xc}$  在 PCE 法采样规模为  $1 \times 10^3$  时达到收敛标准;而 MCS 法和 LHS 法在采样规模为  $1 \times 10^3$  时波动率仍在 10% 以上,在  $1 \times 10^5$  时才达到收敛标准。误差  $\delta_{yc}$  和  $\delta_{za}$  测试结果也相同,这意味着本文方法具有更高的收敛性能,且在样本量减小两个数量级的情况下达到相同的计算精度。



(a) 几何误差  $\delta_{xc}$  的收敛过程



(b) 几何误差  $\delta_{yc}$  的收敛过程



(c) 几何误差  $\delta_{za}$  的收敛过程

图 7 收敛性能测试结果对比

Fig.7 Comparison of convergence performance test results

表 3 还对比了 3 种方法的计算时间。结果显示,本文方法在降低计算精度的前提下,计算时间相对 MCS 法减少了 96.8%,相对 LHS 法减少了 98.1%。此外,本文方法中大部分时间用于 PCE 建模,只要模型构建完成,便可快速求解灵敏度指数。随着机床日益复杂,面对更多轴类型的机床和更多的几何误差,本文方法的优势将更加显著。

#### 4 结论

(1) 本文提出了基于多项式混沌展开的全局灵敏度分析方法,运用正交匹配追踪算法实现多项式系数的快速求解,并给出了基于该方法的 Sobol 灵敏度指数。

(2) 测量得到机床 41 项几何误差的近似概率分布,在确定采样测试点后,使用 PCE 法对几何误差进行全局灵敏度分析,得到了影响各方位姿误差分量的关键几何误差。

(3) 与 MCS 法和 LHS 法进行对比,本文方法的正确性得到验证,且在保证计算精度的前提下,具有更高的收敛性能,样本量从  $1 \times 10^5$  降低到  $1 \times 10^3$ ,计算时间分别减少了 96.8% 和 98.1%。

#### 参考文献

- [1] 项四通,吴铨洋.灵敏度分析在数控机床精度优化中的应用研究现状[J].航空制造技术,2021,64(22):40-47,55.
- XIANG Sitong, WU Chengyang. Application of sensitivity analysis in precision optimization of CNC machine tools: A state-of-the-art review[J].

Aeronautical Manufacturing Technology, 2021, 64(22): 40-47, 55.

[2] CHENG Q, FENG Q N, LIU Z F, et al. Sensitivity analysis of machining accuracy of multi-axis machine tool based on POE screw theory and Morris method[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 84(9): 2301-2318.

[3] LI J, XIE F G, LIU X J. Geometric error modeling and sensitivity analysis of a five-axis machine tool[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 82(9): 2037-2051.

[4] ZOU X C, ZHAO X S, WANG Z W, et al. Error distribution of a 5-axis measuring machine based on sensitivity analysis of geometric errors[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 2020: 8146975.

[5] FU G Q, GONG H W, FU J Z, et al. Geometric error contribution modeling and sensitivity evaluating for each axis of five-axis machine tools based on POE theory and transforming differential changes between coordinate frames[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2019, 147: 103455.

[6] 郭世杰,梅雪松,姜歌东,等.数控机床几何误差相关性分析方法研究[J].农业机械学报,2016,47(10):383-389.

GUO Shijie, MEI Xuesong, JIANG Gedong, et al. Correlation analysis of geometric error for CNC machine tool[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(10): 383-389.

[7] 王培桐,范晋伟,任行飞,等.一种新的机床位置误差灵敏度分析方法[J].仪器仪表学报,2022,43(12):129-138.

WANG Peitong, FAN Jinwei, REN Xingfei, et al. A novel sensitivity analysis method for machine tool position error[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(12): 129-138.

[8] SAKAMOTO S, INASAKI I. Influence

表 3 计算时间对比

Table 3 Comparison of calculation time

方法	PCE 建模		灵敏度指数求解		总时间/s
	采样规模	时间/s	采样规模	时间/s	
PCE 法	$1 \times 10^3$	7.2914	—	0.5847	7.8761
MCS 法	—	—	$1 \times 10^5$	244.0789	244.0789
LHS 法	—	—	$1 \times 10^5$	423.9143	423.9143

of structure errors in five-axis machining centers on the machining accuracy[J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C, 1996, 62(594): 748–753.

[9] MURRAY R M, LI Z X, SASTRY S S. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[10] WIENER N. The homogeneous chaos[J]. American Journal of Mathematics, 1938, 60(4): 897.

[11] SUDRET B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(7): 964–979.

[12] XIU D B, KARNIADAKIS G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 137–167.

[13] PATI Y C, REZAIIFAR R,

KRISHNAPRASAD P S. Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]// Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove: IEEE Comput. Soc. Press, 1993.

[14] SOBOL' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2001, 55(1–3): 271–280.

[15] CHEN G Q, YUAN J X, NI J. A displacement measurement approach for machine geometric error assessment[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2001, 41(1): 149–161.

[16] TSUTSUMI M, SAITO A. Identification and compensation of systematic deviations particular to 5-axis machining

centers[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2003, 43(8): 771–780.

[17] MARELLI S, SUDRET B. UQLab: A framework for uncertainty quantification in Matlab[C]// Vulnerability, Uncertainty, and Risk. Liverpool: American Society of Civil Engineers, 2014: 2554–2563.

[18] CAMERON R H, MARTIN W T. The orthogonal development of non-linear functionals in series of fourier-Hermite functionals[J]. The Annals of Mathematics, 1947, 48(2): 385.

通讯作者: 胡腾, 副教授, 博士, 研究方向为精密机床综合空间精度智能预测与补偿技术、切削动力学行为预报与智能控制技术、深度学习与装备故障诊断技术。

## Geometric Error Sensitivity Analysis of Machine Tool Based on Polynomial Chaos

ZHENG Hualin<sup>1,2</sup>, ZHAO Xing<sup>1</sup>, HU Teng<sup>1,2</sup>, WEI Xiaojian<sup>1</sup>, WANG Xiaohu<sup>1</sup>

(1. Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;

2. Oil and Gas Equipment Technology Sharing and Service Platform of Sichuan Province, Chengdu 610500, China)

**[ABSTRACT]** In order to solve the problem of large sample demand and low computational efficiency in the current sensitivity analysis method, a global sensitivity analysis method based on polynomial chaos expansion was proposed. Firstly, a complete spatial error model was established based on the screw theory by taking the AC type double turntable five-axis CNC machine tool as the research object. Secondly, the polynomial chaos expansion model of machine tool geometric error was constructed. The orthogonal matching pursuit was used to sparse the model, and the Sobol sensitivity index based on this method was given. Furthermore, the geometric errors of five-axis CNC machine tools were analyzed. The approximate probability distribution of 41 errors are measured and counted, and the key geometric errors affecting the pose error components in each direction are analyzed. Compared with Monte Carlo simulation and Latin hypercube sampling, the correctness of the polynomial chaos expansion method is verified. Under the premise of not reducing the calculation accuracy, the sample size is reduced from  $1 \times 10^5$  to  $1 \times 10^3$ , the calculation time is reduced by 96.8% and 98.1% respectively, and the calculation efficiency is significantly improved.

**Keywords:** Five-axis CNC machine tool; Geometric error; Sensitivity analysis; Polynomial chaos expansion; Screw theory

(责编 阳光)