

# 基于 Bayes 理论的涡轮盘结构概率疲劳寿命预测

## Probabilistic Fatigue Life Prediction of Aircraft Turbine Disk Based on Bayes Theory

空军装备部科研订货部 葛莉  
 电子科技大学机械电子工程学院 汤咏 朱顺鹏

**[摘要]** 基于确定性寿命预测模型结果呈现出的误差与不确定性来源分析,应用 Bayes 理论探讨了涡轮盘结构的概率疲劳寿命预测方法。通过应用 Bayes 因子作为模型选择策略,确定出最优模型,然后对概率寿命预测模型使用 Bayes 推理得出该模型中参数所服从的概率密度函数,最后利用参数概率密度函数,结合蒙特卡洛仿真方法,获得预测寿命的概率密度函数。

**关键词:** 高温低周疲劳 不确定性 概率寿命预测 涡轮盘 Bayes 推理

**[ABSTRACT]** According to the sources of error and uncertainty from life prediction results by using the deterministic models, a new probabilistic fatigue life prediction method for aircraft turbine disk is proposed based on Bayes theory. Through using the Bayes factor as the model selection strategy to determine the optimal model, the parameter type of probability density function in the best model can be obtained by using Bayes inference technique. Combination of Monte Carlo simulation, the probability density function of fatigue life can be predicted by using the probabilistic method.

**Keywords:** High temperature low cycle fatigue Uncertainty Probabilistic life prediction Turbine disk Bayes inference

作为航空发动机的断裂和耐久性关键件之一,涡轮盘在高温、高速下工作所承受的载荷复杂,一旦发生破坏性故障将导致严重的后果。随着航空发动机推重比的不断提高,低周疲劳失效已经成为涡轮盘最主要的失效模式之一。涡轮盘的高温低周疲劳寿命是影响和限制发动机使用寿命的主要因素<sup>[1]</sup>。在对涡轮盘构件进行可靠性评估时,物理模型常用来预估其寿命。因此,对涡轮盘的高温低周疲劳寿命进行预估是涡轮盘结构设计的重要环节。涡轮盘在高速旋转中除了承受着叶片的离心负荷造成的轮缘载荷,还承受着热应力作用下的负荷,所以涡轮盘同时经受着蠕变损伤和疲劳破坏。为了保证涡轮盘的安全、可靠运行,针对涡轮

盘的服役载荷和环境特征,建立物理寿命模型并可靠预测其服役时间已成为航空发动机定延寿工作的重要组成。

目前,国内外学者提出了较多的高温低周疲劳寿命预测模型和方法,如线性累积损伤法、广义损伤函数(GSEDF)法<sup>[2-3]</sup>、应变能密度(SEDM)法<sup>[4]</sup>、延性耗竭(DE)模型<sup>[5-7]</sup>和广义能量损伤参数(GDP)模型<sup>[8-9]</sup>。根据不同的损伤参量,这些模型可划分为两大类:基于应力应变的寿命预测模型和基于能量法则的寿命预测模型。上述寿命预估模型均为确定性方法,在工程分析中缺乏考虑寿命预测中面临的诸多不确定性影响,如材料属性、载荷、模型误差、参数估计和机械构件属性等方面引入的不确定性。实践证明,确定性寿命预测方法只适用于大量试验数据下的寿命设计和评估,并不能保证结构的可靠性和计算其预估风险,所预测的寿命值往往偏低,造成制定过于保守的维修策略。

但是对这些确定性寿命预测模型而言,其参数及预测出的疲劳寿命均为常数。这对小样本下及寿命呈分散状态的涡轮盘结构而言,确定性寿命预测模型和方法有着明显的缺陷。

本文针对发动机涡轮盘结构,使用两个确定性寿命预测模型,因为两个模型的预测寿命间存在冲突与误差,通过采用 Bayes 因子判断出最优模型,然后建立概率寿命预测模型,使用 Bayes 推理技术,结合小样本数据进行信息更新模型参数,最后利用蒙特卡洛仿真方法获得模型预测寿命分布。

## 1 涡轮盘结构的低周疲劳寿命预测

### 1.1 塑性应变能密度模型

塑性应变能密度是循环应力-塑性应变滞后回线内的面积,通过将其作为疲劳损伤参量,结合能量失效准则建立了被广泛使用的寿命预测塑性应变能密度模型(Plastic Strain Energy Density, PSED),即

$$\Delta W_p N_f^\beta = C_1, \quad (1)$$

式中, $\beta$ 和 $C_1$ 是材料常数,分别表征材料的疲劳指数

和材料能量吸收容量;  $N_f$  为疲劳寿命。

## 1.2 广义能量损伤参数模型

通过考虑循环载荷作用下的疲劳破坏和高温下蠕变损伤交互作用失效机理研究,本课题组提出了考虑平均应力效应的广义能量损伤参数模型(Generalized Damage Parameter, GDP),综合应用了应力-应变与寿命的关系、应变能损伤函数模型、频率分离技术,是一种较为全面的寿命预测模型,可应用于涡轮盘结构的寿命预测。

$$\left(\frac{\Delta W_p}{U}\right) N_f^{a(1+n')} = 1, \quad (2)$$

式中,  $\frac{1}{U} = \frac{2^{n'-1}(1+n')}{c^{1+n'}(1-n')K'} \frac{v_t^{\alpha(n+j-1)(1+n')}\sigma_{\max}^{1+n'}}{v_c^{an(1+n')}}$ ,  $n'$ 、 $n$ 、 $K'$ 、 $j$ 、 $a$  均为材料常数;  $v_t$ 、 $v_c$  分别为循环加载中拉、压进程的频率。

在平衡波形加载条件下,拉、压进程的频率相同时,式(2)可以简化为

$$(\Delta W_p \sigma_{\max}^{1+n'}) N_f^{a(1+n')} = C_2, \quad (3)$$

式中,  $\Delta W_p$  为塑性应变能密度,多数材料在起始循环中,应力-应变曲线变化较大,但经过寿命的 10% 至 20% 次循环后,该曲线接近稳定,这样的曲线被称为循环应力-应变滞后回线,如图 1 所示。

根据 Ramberg-Osgood 关系式,将  $O\epsilon\sigma$  坐标下的循环应力-应变曲线规律和  $O\Delta\epsilon\Delta\sigma$  坐标下的循环应力-

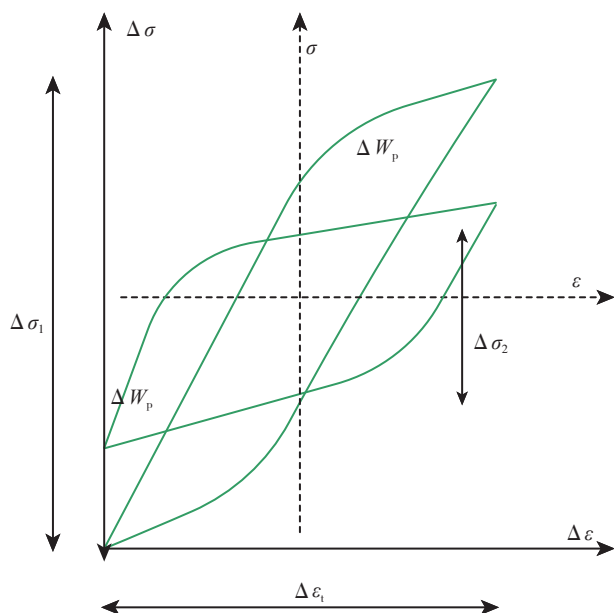


图1 塑性应变能密度  $\Delta W_p$  示意图  
Fig.1 Sketch map of  $\Delta W_p$

应变滞后回线变化规律分别描述如式(4)和式(5):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n}, \quad (4)$$

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'}, \quad (5)$$

其中,  $\sigma$  为应力,  $\epsilon$  为应变。Halford 将循环应力-应变滞后回线近似表达为指数函数形式为

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K' \left(\frac{\Delta\epsilon_p}{2}\right)^{n'}. \quad (6)$$

通过对称循环加载可得出  $O\epsilon\sigma$  坐标下的循环应力-应变曲线,当坐标标度放大一倍后,则得出了  $O\Delta\epsilon\Delta\sigma$  坐标下的循环应力-应变滞后回线。对 Masing 材料而言,滞后回线与循环应力-应变曲线规律相似,这时塑性应变能为

$$\Delta W_p = \int_{\text{cycle}} \sigma d\epsilon = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta\sigma \Delta\epsilon_p. \quad (7)$$

联合式(5)和式(6),得出塑性应变能密度函数为,

$$\Delta W_p = 4 \frac{1-n'}{1+n'} K' \left(\frac{\Delta\epsilon_p}{2}\right)^{1+n'}. \quad (8)$$

以 GH4133 材料制成的轮胚为研究对象,从轮盘的轮辐中取样,试件直径为 6cm,在 500℃ 下,控制轴向应变,施加三角波载荷,直至试件断裂,收集 32 个样本的寿命数据<sup>[10]</sup>。使用最小二乘法对前 16 组数据拟合确定 PSED 模型和 GDP 模型中参数,从而预测涡轮盘疲劳寿命(表 1)。

表1 数据拟合参数值

参数	$\lg C_1$	$\beta$	$\lg C_2$	$m$	$n'$	$\lg K'$
参数值	6.732	1.5486	10.7327	0.9489	0.0862	3.1520

使用剩余 16 组试验数据验证模型的预测误差。对比对比如图 2 所示模型预测寿命与试验实测寿命,并在双对数坐标系中。

从图 2 看出, PSED 模型和 GDP 模型对于低周疲劳区域的寿命预测能力较强,预测误差较小,而对于高周疲劳区域,即  $10^5$  附近预测误差较大。这说明两个模型在高周疲劳区域预测能力有限,适用于预测涡轮盘结构的低周疲劳寿命。此外对低周疲劳寿命,两个模型预测值与实际值都存在误差,因此有必要以减小寿命预测不确定性为目的,开展概率失效机理建模,提高模型预测能力。

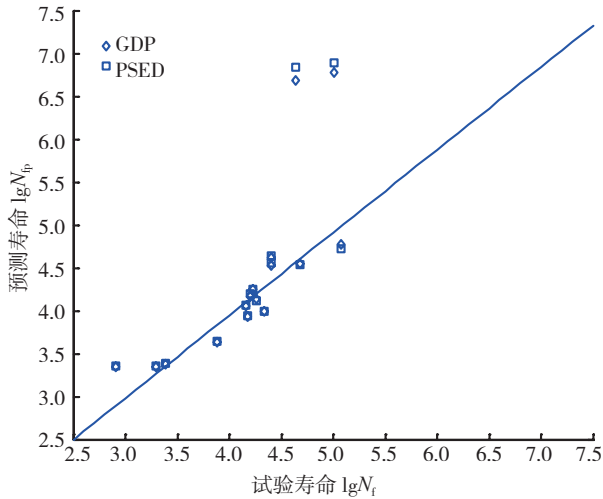


图2 PSED模型和GDP模型预测寿命与试验寿命的对比  
Fig.2 Comparison of prediction and experimental lifetime of PSED and GDP models

## 2 涡轮盘结构的概率疲劳寿命预测

涡轮盘结构寿命预测的概率建模是指在确定性寿命预测模型的基础上应用概率密度函数描述模型中的参数。确定性寿命预测的结果表明,模型预测寿命与实验值有差距,这种误差主要源于以下两方面的因素:第一,数据量少,拟合确定的参数不准确;第二,任意模型都是对真实情况的近似建模,导致模型都存在无法消除的建模误差。除此之外,在图2中,两个确定性寿命预测模型结果间存在冲突,所以需要使用模型选择标准评判出最优模型。

### 2.1 Bayes 推理

通常在有大量数据的情况下,进行常规的统计分析能够确定模型参数服从的概率密度函数,从而实现模型随机化、建立概率模型的目的。然而,对涡轮盘而言,其实验成本高,收集数据难度大,只能获得小样本数据,所以本文采用 Bayes 推理技术<sup>[11]</sup>,结合经验信息,对小样本疲劳试验数据分析获得模型参数的概率密度函数,实现寿命预测模型随机化。

Bayes 推理是一种在获得新信息的基础上,对模型或模型参数进行信息更新的方法,其理论基础是 Bayes 公式。对寿命预测模型使用 Bayes 公式,用  $\theta$  表示模型参数,其对应的先验分布为  $p(\theta)$ ,  $D$  表示试验所获得数据,其对应于 Bayes 公式的似然函数为  $P(D|\theta)$ ,而数据自身的概率为  $p(D)$ ,是常数。运用 Bayes 公式,试验获得的数据信息与先验信息相结合,获得较为准确的参数概率密度函数。

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} \quad (9)$$

此外,为反映寿命预测模型与试验数据的吻合程度,使用 Bayes 公式量化模型概率为

$$p(M_k|D) = \frac{p(D|M_k)p(M_k)}{p(D)} \quad (10)$$

### 2.2 Bayes 因子选择最优寿命预测模型

设模型 PSED 和模型 GDP 为模型  $M_k$ ,其中  $k=1, 2$ 。与模型空间  $M_k = (M_1, M_2)$  相对应的参数空间为  $\theta_1 = (C_1, \beta, n', k')$ ,  $\theta_2 = (C_2, m, n', k')$ 。因此根据式(10),模型概率为:

$$p(M_k|N) = \frac{p(M_k) \int_{\theta_k} p(N|\theta_k, M_k) f(\theta_k|M_k) d\theta_k}{\sum_{k=1}^2 p(M_k) \int_{\theta_k} p(N|\theta_k, M_k) f(\theta_k|M_k) d\theta_k} \quad (11)$$

两个模型的先验概率均取为 0.5,在 Matlab 中编程实现马尔可夫蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, MCMC)仿真<sup>[12]</sup>,分别得出模型概率为  $p(M_1) = 0.5710$ ,  $p(M_2) = 0.4290$ ,通过使用 Bayes 因子作为模型选择策略得:

$$B_{12} = \frac{P(M_1)}{P(M_2)} = 1.3310 \quad (12)$$

根据 Jeffory 标准<sup>[13]</sup>,模型 1 与数据吻合程度更高,所以选择 PSED 模型作为涡轮盘结构的低周疲劳寿命预测模型。

### 2.3 Bayes 推理量化参数概率密度函数

根据式(9),Bayes 推理出模型参数概率密度函数为  $L$

$$p(\theta_1|M_1, N) = \frac{p(N|\theta_1, M_1)p(\theta_1|M_1)}{\int_{\theta_1} p(N|\theta_1, M_1)f(\theta_1|M_1)d\theta_1} \quad (13)$$

在 Matlab 软件中,编制马尔可夫链蒙特卡洛仿真算法对 PSED 模型,结合 Bayes 推理技术得到模型中参数后验概率密度函数,参数的抽样轨迹图如图 3 中的蓝线条所示,观察轨迹,可看出在 100 个样本内,算法收敛效果明显。同时,算法得出了参数抽样分散值。在概率密度函数估算方法中,非参数估计比参数估计更有效,所以首先使用非概率参数估计得出概率密度函数,如图 3 中下图的蓝线所示,然后采用正态分布近似参数概率密度函数,如图 3 中红色实线所示,对比非概率参数估计和近似正态分布,其结果表明,二者形态非常相似,所以可选择近似正态分布作为后验分布。为对比后验分布对先验分布的调整,在图 3 中用红色虚线表示参数先验分布,两者对比说明,使用 Bayes 推理,有效地修正了参数概率密度函数。

与图 3 中表示的后验分布相对应,表 2 给出了 PSED 模型中参数后验概率密度函数值。

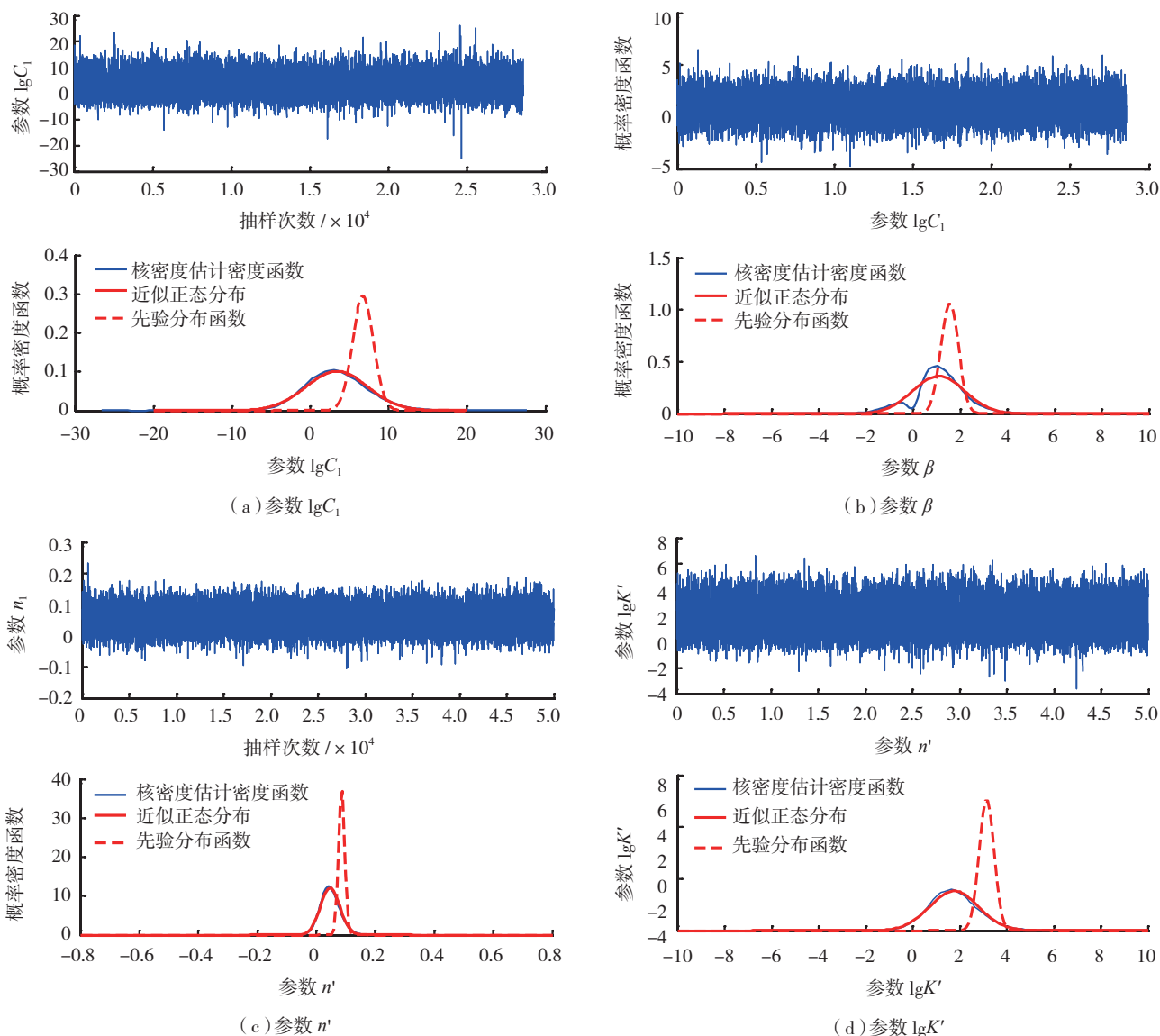


图3 PSED模型参数的抽样轨迹及其先验、后验分布

Fig.3 Sampling trace,prior and posterior distributions of PSED model parameters

表2 参数后验先验概率密度函数对比

参数	分布形式	后验均值	后验标准差
$\lg(C_1)$	正态分布	3.4080	3.9400
$\beta$	正态分布	1.0912	1.1018
$n'$	正态分布	0.0471	0.0329
$\lg K'$	正态分布	1.7598	1.0404

使用蒙特卡洛仿真方法,可以得出不同应力-应变下的疲劳寿命概率密度函数,但为了对比模型预测能力,使用寿命概率密度的中值寿命作为概率建模下的预测寿命,因此在双对数坐标系中,对比概率PSED模型的预测值与试验寿命,如图4所示。

图4直观地反映了模型在高周疲劳区域预测能力有

限,而在低周寿命区域,寿命预测较为贴近试验值,表2列出了概率建模和确定性建模下PSED模型的预测误差。

在表3中,第14和16组是预测误差较大的数据点。追溯相应试验条件,试验测量塑性应变幅为0,分别对比第13和14组、15和16组试验条件,可见应力水平和试验寿命均相当,但是塑性应变测量值相差较大,而在预测结果中第13和15组误差相对较小,所以14和16组误差较大的原因是,有限试验条件造成的测量不准确引起预测误差。在第1~12组中,第4和第7组数据,概率建模明显比确定性建模更优。而其他组中,确定性建模与概率建模相差不大。综上所述,概率寿命预测方法给出了涡轮盘结构预测寿命的概率分布,可给出不同设计要求下,给定不同存活率下的预测寿命。

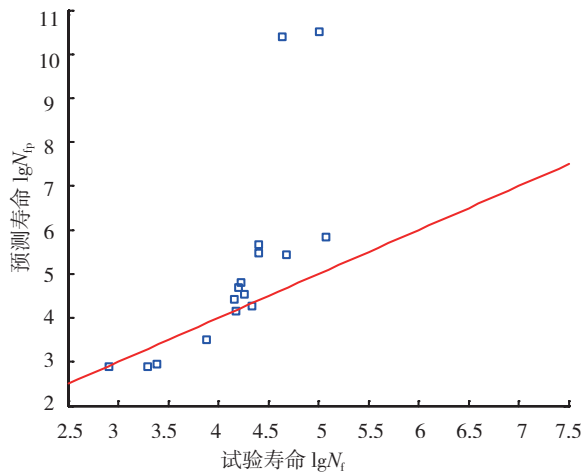


图4 概率PSED模型预测值与试验值对比  
Fig.4 Comparison of prediction and experimental values of probabilistic PSED model

表3 概率建模与确定性建模下的PSED模型预测误差

样本序列	概率 PSED 模型预测误差	确定性 PSED 模型预测误差
1	0.1110	0.0314
2	0.5443	0.4787
3	0.1540	0.0896
4	0.0020	0.2014
5	0.3697	0.0309
6	0.5204	0.0594
7	0.0841	0.2831
8	0.1574	0.1828
9	0.5688	0.0828
10	0.3490	0.0767
11	0.8567	0.2249
12	0.9954	0.3222
13	0.5484	0.0736
14	4.0684	2.3571
15	0.4430	0.2688
16	3.7731	2.0383

### 3 结论

本文针对小样本数据条件下,对高温疲劳-蠕变失效的涡轮盘结构,采用 Bayes 理论确定最优寿命预测模型,并在此模型基础上,建立概率寿命预测模型,其预测结果表明:

(1)应用 Bayes 理论,在量化参数概率密度函数的同时获得了模型概率。一方面,应用模型参数后验分布,实现了寿命预测模型的概率建模;另一方面,在模型概率基础上,使用 Bayes 因子作为模型选择策略,确定了 PSED 模型为相对最优寿命预测模型。

(2)由 Bayes 理论得出的 PSED 模型参数后验概率,结合蒙特卡洛抽样仿真,获得了涡轮盘结构寿命预测概率密度函数,选择 50% 生存率的均值寿命作为预测寿命。

(3)本文提出的概率建模方法通用性强,适合推广应用用于发动机其他关键部件的疲劳寿命预测。

### 参考文献

- [1] 江和甫. 对涡轮盘材料的需求及展望. 燃气涡轮试验与研究, 2002, 15(4): 1-6.
- [2] Zhu S P, Huang H Z. A generalized frequency separation-strain energy damage function model for low cycle fatigue-creep life prediction. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2010, 33(4): 227-237.
- [3] 朱顺鹏, 黄洪钟, 何俐萍, 等. 高温低周疲劳-蠕变的改进型广义应变能损伤函数方法研究. 航空学报, 2011, 32(8): 1445-1452.
- [4] Payten W, Dean D, Snowden K. A strain energy density method for the prediction of creep-fatigue damage in high temperature components. Materials Science and Engineering: A, 2010, 527(7-8): 1920-1925.
- [5] Zhu S P, Huang H Z, Li H Q, et al. A new ductility exhaustion model for high temperature low cycle fatigue life prediction of turbine disk alloys. International Journal of Turbo and Jet Engines, 2011, 28(2): 119-131.
- [6] Zhu S P, Huang H Z, Li Y F, et al. A novel viscosity-based model for low cycle fatigue-creep life prediction of high-temperature structures. International Journal of Damage Mechanics, 2012, 21(7): 1076-1099.
- [7] Zhu S P, Huang H Z, Liu Y, et al. An efficient life prediction methodology for low cycle fatigue-creep based on ductility exhaustion theory. International Journal of Damage Mechanics, 2013, 22(4): 554-569.
- [8] Zhu S P, Huang H Z, He L P, et al. A generalized energy-based fatigue-creep damage parameter for life prediction of turbine disk alloys. Engineering Fracture Mechanics, 2012, 90: 89-100.
- [9] 朱顺鹏. 高温复杂结构的混合概率故障物理建模与疲劳寿命预测[D]. 成都: 电子科技大学, 2011.
- [10] 王卫国. 轮盘低循环疲劳寿命预测模型和试验评估方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.
- [11] Karandikar J M, Kim N H, Schmitz T L. Prediction of remaining useful life for fatigue-damaged structured using Bayesian inference. Engineering Fracture Mechanics, 2012, 96:588-605.
- [12] Hastie D I. Model choice using reversible jump markov chain monte carlo. StatisticaNeerlandica, 2012, 66(3): 309-338.
- [13] Kass R E, Raftery A E. Bayes Factors. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90(430): 773-795.

(责编 良辰)