

基于有限体积法的液体晃动数值模拟

Numerical Simulation of Sloshing Waves Based on Volume of Fluid Method

西北工业大学 欧阳林辉 邓晓涛 霍世慧

[摘要] 利用有限体积法研究液体晃动行为,对二维和三维矩形储液容器液体晃动进行分析,得到液体晃动平均动能时间曲线、瞬时压力图和瞬时速度矢量图等。二维矩形容器的结果与线性解析解具有很好的一致性,将方法扩展到三维矩形容器的情况,得到液体晃动平均动能时间曲线、瞬时压力图和瞬时速度矢量图,并模拟出液体晃动的行波和驻波现象。有限元体积法能分析压力分布图和平均动能曲线,压力分布图能评估结构安全性和稳定性,平均动能曲线可以评估液体晃动噪声水平,对结构设计有重要的指导作用。

关键词: 有限体积法 液体晃动 平均动能 压力分布

[ABSTRACT] Liquid sloshing are analyzed using the volume of fluid method. The liquid sloshing in a two dimensional tank and a three dimensional tank are analyzed. Mean kinetic energy and time curve, instantaneous pressure figure, velocity magnitude and vectors figure of the liquid sloshing. The results of a two dimensional tank are found to be in good agreement with the linear analytical solutions, which verifies the volume of fluid method. And work out the result of a three dimensional tank. Mean kinetic energy and time curve, instantaneous pressure figure, velocity magnitude and vectors figure of the liquid sloshing are obtained, and traveling wave and standing wave of liquid sloshing are simulated. Pressure distribution figure and mean kinetic curve are obtained by the volume of fluid method. The structural safety and stability is estimated by pressure distribution figure. The noise level of liquid sloshing can be estimated by mean kinetic energy curve, which is vital to structure design.

Keywords: Volume of fluid method Sloshing waves Mean kinetic energy Pressure distribution

液体晃动表征容器内部自由液面的任何运动,这种运动是由部分充液容器所受到的各种各样的扰动引起的^[1]。由于扰动类型和容器外形的不同,自由液面可能包括不同类型的运动,包括简单平面、非平面、旋转、不规则撞击、对称的、非对称的、准周期的和混乱的运动。

由于充液容器的液体晃动现象广泛存在于各类工程系统中^[2],因此对晃动行为开展研究,分析运动规律以及对工程结构的影响具有重要意义。

众多学者对此展开研究,目前主要的研究方法有3种:经典解析方法、数值模拟方法和试验方法。经典解析方法仅仅适用于少数几何形状规则的情况,而试验方法花费巨大,目前研究中采用最多的是数值模拟方法。Abramson HN^[3]详细讨论了解析方法和试验方法在火箭燃料仓液体晃动行为的研究,线性解析解在一定条件下与试验结果吻合。Housner^[4]提出了著名的刚性储液罐简化模型,将储液罐内流动效应分为脉冲分量和对流分量两部分,脉冲分量用固定质量与惯性矩等效;对流分量用等效原则简化为一弹簧质量系统。刘新立^[5]运用有限体积法对矩形液舱中的液面晃动进行仿真分析,得到了不同时刻舱内液体的液面形状。毛志祥^[6]扩展了拟弹性法并将其用于飞机整体油箱液固耦合振动频率的计算,计算出的频率与试验结果吻合。G.X.Wu^[7]等利用基于非线性速度势理论的有限单元法分析了三维储液容器的液体晃动问题。基于位移法的模拟,变量多,影响计算速度。有限体积法变量大大减少,可以很好提高运算效率。因此运用有限体积法对储液容器的液体晃动行为进行数值模拟,开展液体不同时刻的液面形状、压力分布和液体晃动的平均动能研究。

1 液体晃动基本理论

运动容器中的液体振动的一般问题很难得到精确解,理论分析中通常要用到简化假设。假设一刚性容器,其中含无旋无粘均匀不可压缩流体。

坐标系放在液体非扰动平面, x 和 y 轴在液体表面平面内, z 轴垂直于液体表面。无旋流体假设确保在任意单连通区域内存在单值的速度势函数,速度场可以通过取梯度得到^[8]。

$$\vec{V} = \nabla\phi \quad (1)$$

在无旋流体中对于一个质点的牛顿第二运动定律的矢量表达式为:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p + \vec{F}_B = \vec{A} \quad (2)$$

其中, ρ 为质量密度, p 为垂直压力强度, \vec{F}_B 为体力矢量,

\vec{A} 为加速度矢量。注意到这个关系:

$$\frac{d()}{dt} = u \frac{\partial ()}{\partial x} + v \frac{\partial ()}{\partial y} + w \frac{\partial ()}{\partial z} + \frac{\partial ()}{\partial t} \quad (3)$$

上述方程可以重新写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - A \end{aligned} \quad (4)$$

其中,假设体力仅由加速度场引起,同时流体的连续性必须遵守。因此,

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5)$$

方程(4)和(5)是充分的,一旦适当的初始和边界条件给定,就可以唯一的确定速度分量 u, v, w 和压力 p 。

把方程(1)代入方程(5),可以看到 ϕ 必须满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

流体是无旋流体,和密度为常数,因此运动方程(4)先积分然后线性化可以得到伯努利方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{\rho} p = 0 \quad (7)$$

其中,加速度场已经被指定为重力加速度。 ϕ 从方程(6)确定及适当的边界条件,方程(1)可以求得速度矢量,由方程(7)可以求得压力分布。作用于容器上的力和力矩可以由压力的适当积分得到。

2 数值模拟

2.1 二维情况的数值模拟

在二维刚性边界条件下,由于解析解具有相对简单的形式,便于与数值解进行对比,可以验证方法的适用性。

容器受到的位移激励为 $x_b(t) = a \sin(\omega t)$, $y_b = 0$ 和 $z_b = 0$ (当 $t > 0$, a 为振幅, ω 为频率)。计算尺寸选为 $L = 2.0\text{m}$, $B = 0.2\text{m}$, $d = 1.0\text{m}$ 。 L, B 和 d 分别为长、宽和水深。试验分析已经证实对于液体晃荡问题,由第一阶模态所产生的力是最为重要的^[3]。

基于速度势二维问题的线性解答,波高由(8)式给出。

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a}{g} (\chi \omega^2 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \omega \sin k_n x) \omega, \\ \xi_2 &= -\frac{a}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (C_n + \frac{H_n}{\omega^2}) \sin k_n \sin \omega_n t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2n+1}{L} \pi, \omega_n^2 = g k_n \tan k_n d, \\ H_n &= \omega^3 \frac{4}{L} \frac{4(-1)^n}{k_n^2}, C_n = \frac{H_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

根据式(8)求得的第一阶频率为 $f_0 = 0.59832$ 。为了便于与应用线性理论解析解进行比较,选定一个小的位移 $a = 0.0186\text{m}$ 。激励频率选为稍微高于或低于第一阶频率。式(8)由两部分组成,一部分对应于激励频率 ω ,另一部分对应于自然频率 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ 。当然对于第二部分,一阶频率 ω_0 的波形起支配作用,其他频率的贡献微小。因此,整个波形由 ω 和 ω_0 两个频率的波形确定。合并后的周期为 $\Delta \omega = |\omega - \omega_0|$,周期为 $2\pi / \Delta \omega$ 。文献[8]中,对于自由液面垂直方向的振动,1.1倍和0.9倍的激振频率时周期为17s,0.999倍的激振频率时周期为1700s。平均动能曲线并没有文献[8]所求曲线的周期性那么明显,但也大致反映了这个趋势,平均动能由两部分组成,自由液面附近的液体运动和其余液体的运动,自由液面附近的运动以垂直方向的振动为主。这些可以由图2(b)给出的速度矢量图看出。图1(a)为激振频率是基频1.1倍时($\omega/\omega_0 = 1.100$)的平均动能曲线,图1(b)、图1(c)和图1(d)分别是0.999倍、0.9000倍和0.583倍时的平均动能曲线。由图1(a)和图1(c)看出,平均动能的周期与文献[8]所示自由液面振动的周期相近。从图1(b)看出,平均动能随时间而增加,即使根据线性理论,它也并不表示平均动能随时间增加而趋于无穷。因为 $\Delta \omega$ 非常小,导致很长的周期($2\pi / \Delta \omega \approx 1700\text{s}$)和很大的波动幅度。由图1(d)看出激励频率远离一阶频率时,平均动能很小,因为此时液面自由运动很微小。由效力学模型理论,液体深度接近 $h/a = 2$ 时,有效的质量惯性矩是固化液体的18%左右。并不是所有的液体参与了容器的运动,有一部分液体几乎处于静止状态,由此可以导致了有效质量惯性矩的下降。

图2给出了 $\omega/\omega_0 = 0.999$ 情况下的压力图(图2(a)) and 速度矢量图(图2(b))。从图2(b)速度矢量图看出,只是自由液面附近的液体运动速度比较大,其余的液体几乎处于静止状态。因此在等效力学模型中有可运动的弹簧质量模型,也有固定质量。

图3分别给出了基于有限体积法的瞬时自由高度(图3(a))和线性解析方法的瞬时自由液面高度(图3(b)) ($t = 5.13\text{s}$, $\omega/\omega_0 = 0.999$),从两图中可以看出两种方法的结果非常吻合。

2.2 三维矩形容器数值模拟结果

箱体受到的位移激励为 $x_b(t) = a_x \sin(\omega_x t)$, $y_b(t) = a_y \sin(\omega_y t)$, 其中 a_x 和 ω_y 分别为波动,摆动模态的幅值和频率。

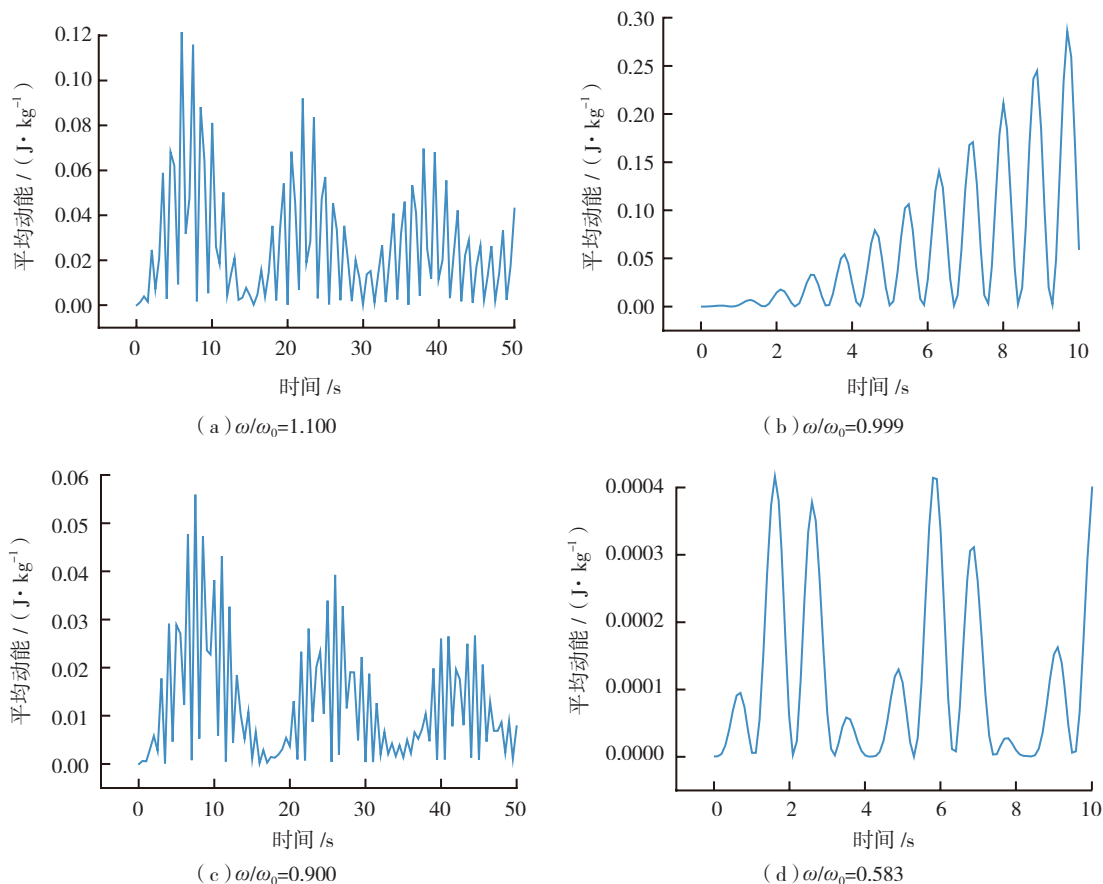


图1 4种激励情况下的平均动能曲线

Fig.1 Mean kinetic energy curve in four excitation frequency

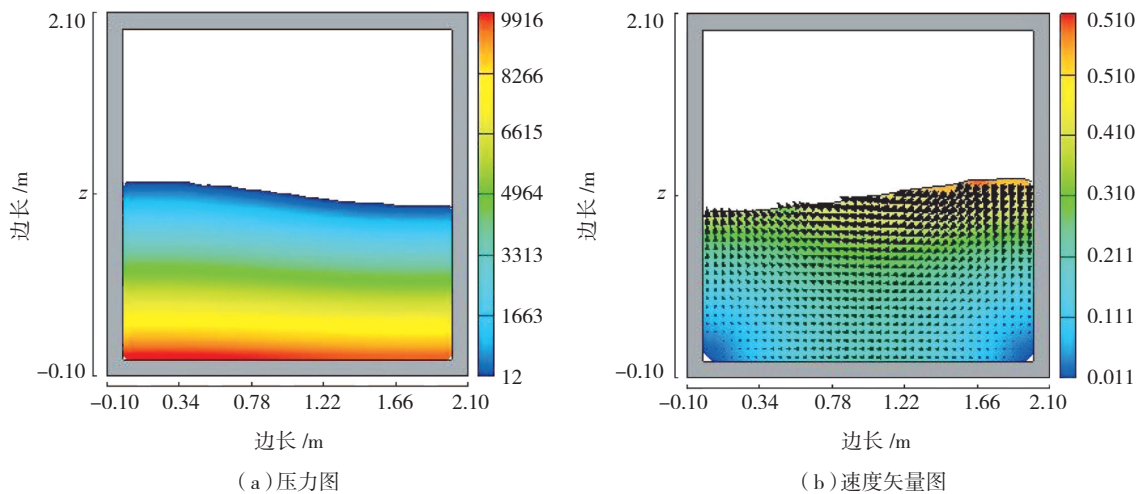


图2 $\omega/\omega_0=0.999$ 情况下的压力图和速度矢量图

Fig.2 Instantaneous pressure and instantaneous velocity vector figure in $\omega/\omega_0=0.999$

三维箱体的波动运动远比二维情形来的复杂。表1给出模拟的3种情况下的频率和振幅。用不同的参数来说明这些参数对所引起波动的影响。表中的 ω_{ix} 和 ω_{iy} 是基于线性解析解计算出来的对应于x和y方向的自振频率。式(9)给出三维情形下的自振频率。

$$\omega_{nm}^2 = gk \tanh(kh) \quad (9)$$

其中,

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{B^2} \right) \quad (m, n=0, 1, 2, \dots)$$

x方向的第一和第二阶自振频率 ω_{0x} 和 ω_{1x} 分别由

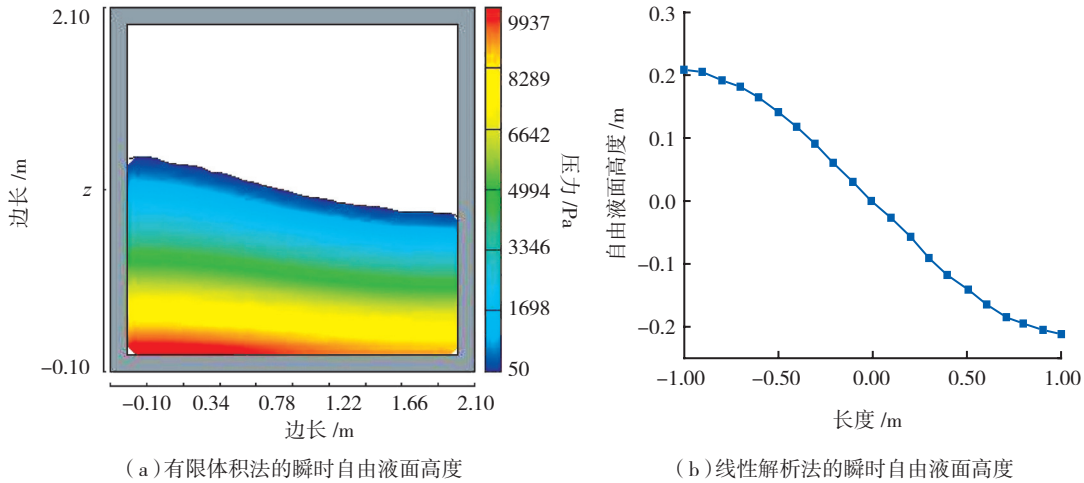


图3 瞬时自由液面高度
Fig.3 Instantaneous free surface height

$m=1, n=0$ 和 $m=3, n=0$ 得到。类似的, ω_{0y} 和 ω_{1y} 分别由 $m=0, n=1$ 和 $m=0, n=3$ 得到。 $\omega_{0x}=\omega_{0y}=2.2478, \omega_{1x}=\omega_{1y}=4.7645$ 。

在计算中,箱体尺寸取相同的数值。 $L=4m, B=4m$ 和 $d=4m$,变量是激励的频率和幅值。

在情况 A 时,由于激励很微小,响应比较小,这里不再给出响应的响应图,只给出另外两种激励下的响应。情况 A 和情况 B 对应的激励频率都是液体晃动的第一阶自振频率,情况 B 的位移幅值是 A 的 100 倍,情况 C 的位移幅值与 B 相同激励频率为液体晃动的第二阶自振频率。值得注意的是,情况 C 激励的速度和加速度都比情况 B 要大,但响应却比情况 B 小。

图 4 给出了 2 种情况下的平均动能曲线,从图中可以看出情况 C 的平均动能比 B 要小得多。

图 5 为压力图和速度矢量图。与文献 [8] 中相对应的情况比较,两图呈现的结果与文献中的基本一致。同

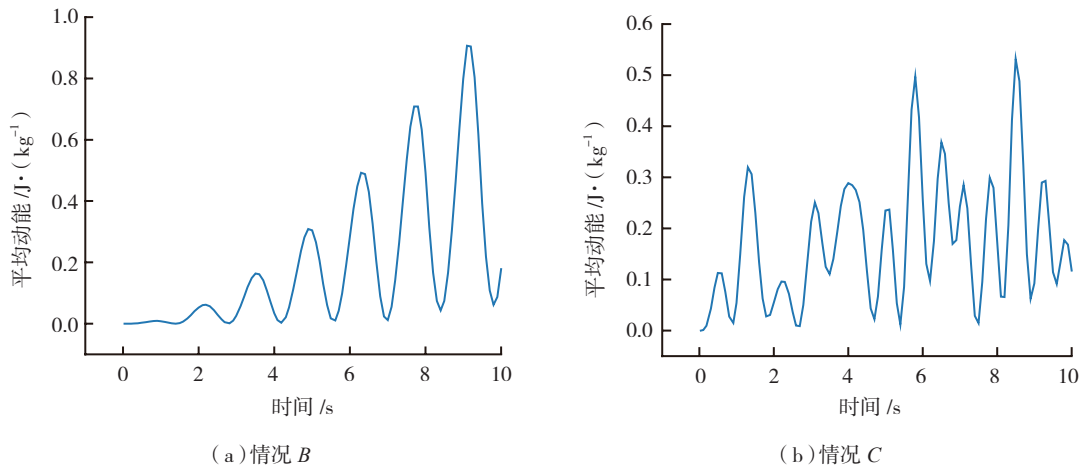


图4 平均动能曲线
Fig.4 Mean kinetic energy curve

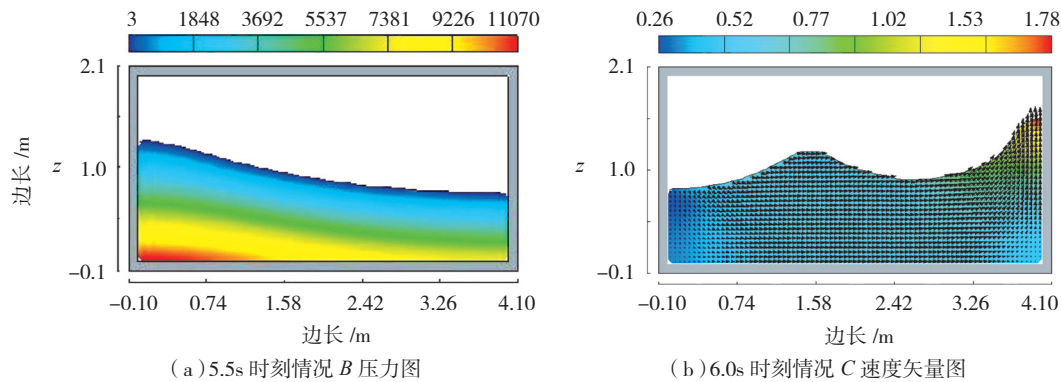
表1 3种工况激励的频率和振幅

情况	频率		振幅	
	ω_x	ω_y	α_x	α_y
A	$0.9999\omega_{0x}$	$0.9999\omega_{0y}$	0.0005637	0.0005637
B	$0.9999\omega_{0x}$	$0.9999\omega_{0y}$	0.05637	0.05637
C	$0.9999\omega_{1x}$	$0.9999\omega_{1y}$	0.05637	0.05637

时,压力分布图对结构安全性和稳定性的评估有重要的作用。速度矢量图可以为防晃隔板的安置提供理论指导,隔板应安置在流速大的区域,既可以减小晃动的幅度,又能耗散晃动能量。

图 6 为 2 种时刻的液面形状图。与文献 [8] 中相对应的情况比较,两图呈现的结果与文献中的基本一致。从图可以看出,两图很好呈现了行波和驻波的现象。

对以上结果进行分析比较得到,有限体积法能计算二维和三维的液体晃动 2 图,能给出平均动能时间曲

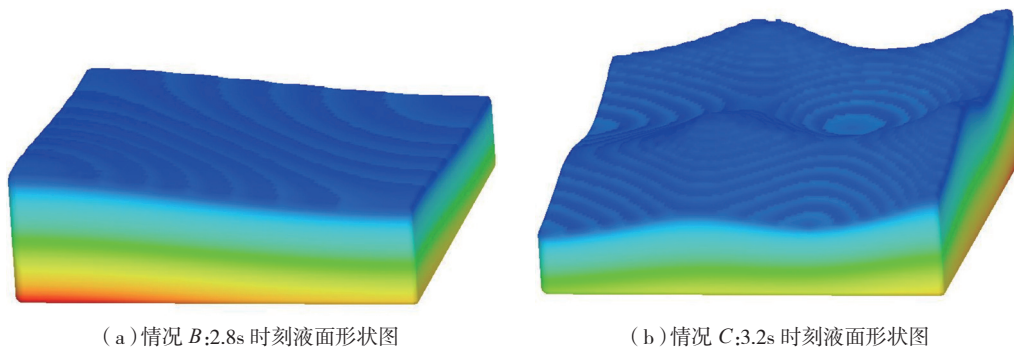


(a) 5.5s 时刻情况 B 压力图

(b) 6.0s 时刻情况 C 速度矢量图

图5 瞬时压力图和速度矢量图

Fig.5 Instantaneous pressure and instantaneous velocity vector figure



(a) 情况 B:2.8s 时刻液面形状图

(b) 情况 C:3.2s 时刻液面形状图

图6 瞬时液面形状图

Fig.6 Instantaneous fluid surface shape figure

线,瞬时压力图,瞬时速度矢量图。同时,给出的压力分布图能评估结构安全性和稳定性,平均动能曲线可以评估液体晃动噪声水平,对结构设计有重要的指导作用。

3 结论

(1) 运用有限体积法计算了二维矩形储液容器液体晃动,给出了平均动能时间曲线,瞬时压力图,瞬时速度矢量图,并与线性解析解进行了详细的对比与分析讨论,结果具有良好的一致性。

(2) 运用有限体积法计算了三维矩形储液容器液体晃动,给出了平均动能时间曲线,瞬时压力图,瞬时速度矢量图。

(3) 有限元体积法能给出压力分布图和平均动能曲线,压力分布图能评估结构安全性和稳定性,平均动能曲线可以评估液体晃动噪声水平,对结构设计有重要的指导作用。

参考文献

- [1] Mateusz G, Torgeir M. Structural response to sloshing excitation in membrane LNG tank. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2011, 133: 1-9.
- [2] Ibrahim R A. Recent advances in liquid sloshing dynamics. *Appl.*

Mech. Rev. 2001. 54(2)133-199.

[3] Abramson H N. The dynamic behaviour of liquid in moving containers. Report SP 106 of NASA, 1966.

[4] Ibrahim R A. *Liquid sloshing dynamics theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005.

[5] 刘新立,严仁军,史政,等. 基于 MSC.Dytran 的液舱晃动分析. *船海工程*, 2010, 39 (2): 44-47.

[6] 毛志祥,杨觉敏. 飞机整体油箱的液固耦合振动计算. *航空学报*, 1990 (11): 589-594.

[7] Wu G X, Ma Q W, Taylor R E. Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Appl. Ocean Res.* 1998 (20): 337-335.

[8] 王勖成. *有限单元法*. 清华大学出版社, 2003.

(责编 小城)

(上接第 65 页)

[4] [EB/OL]. 2012-09-12. <http://www.opengroup.org/togaf>

[5] A Practical Guide to Federal Enterprise Architecture by the CIO Council, Version 1.0, 2001-02.

[6] FEA Consolidated Reference Model Document Version 2.1, published by the Federal Enterprise Architecture Program Management Office, Office of Management of Budget, 2006-12.

[7] The Open Group Architecture Framework (TOGAF) Version 9, Published by The Open Group, 2009.

(责编 亿霖)