考虑变量相关性的非概率可靠性灵敏度分析方法

Non-Probabilistic Reliability and Parameter Sensitivity Analysis Method Considering Correlated Variables

中航工业特种飞行器研究所　王良伟
西北工业大学力学与土木建筑学院
飞行器可靠性工程研究所　何新党

[摘要] 基于不确定性的凸模型描述，研究考虑变量相关情况下非概率可靠性指标及其参数灵敏度求解方法。从非概率可靠性指标的物理意义出发，建立了相关变量和相互独立变量情况下的非概率可靠性统一模型，在此基础上基于 Monte-Carlo 法，在变量的标准化扩展空间内通过全局抽样得到结构失效域内距离原点最近的设计点，然后通过迭代策略求解得到非概率可靠性指标的收敛解。在此基础上基于差分理论，提出了非概率可靠性参数灵敏度分析方法。数值算例验证了所提出方法的可行性和有效性。

关键词：非概率可靠性　相关变量　Monte-Carlo 法　灵敏度分析　差分理论

[ABSTRACT] Based on the convex model description for basic parameters, structural non-probabilistic reliability index and parameter sensitivity analysis method under the convex models are studied. The physical meaning of non-probabilistic reliability index is discussed in this study, after that the unification model of non-probabilistic reliability is built under the case of independent variable and correlated variables both existing. Based on Monte-Carlo method, the globally sampling is performed in the variable expansion space for looking for the nearest design point at the failure limit state surface and finally through the optimization criterion we get a converged solution of structure non-probabilistic reliability index. Numerical examples demonstrate the accuracy and efficiency of proposed method.

Keywords: Non-probabilistic reliability　Correlated variable　Monte-Carlo method　Sensitivity analysis　Difference theory

非概率可靠性设计是用系统允许的最大不确定性来描述系统的可靠性，它将不确定参数用凸域来处理。凸域的形状反映对事件的已知程度，而大小反映不确定事件的波动性或偏离程度。凸模型的最大优点就是对原始数据的要求很低，凸模型的建立只需要知道不确定参数的边界，而不用求其概率密度函数或隶属度函数，因此对于一些昂贵、复杂工程系统中一些“未知但有界”变量和极高可靠性要求的工程问题，具有很好的适用性，因此从 20 世纪 90 年代 Ben–Haim[1] 和 Elishakoff[2] 提出使用凸集模型来描述不确定性以来，非概率可靠性研究受到了各国学者的广泛关注[3-5]。

目前在非概率的研究方面，多集中于非概率可靠性指标的求解问题。如郭书祥等[6]基于区间分析，提出了当不确定参量为区间变量时的一种可靠性度量指标，并给出了 3 种结构非概率可靠性指标求解方法。曹鸿钧等[7]基于超椭球模型，提出了一种凸集合模型下的非概率可靠性指标求解方法。张新峰等[8]对区间模型和凸集合模型下的非概率可靠性指标进行了对比分析，指出了两种可靠性指标之间的差异和对应关系。罗阳军等[9]研究了多椭球模型下非概率可靠性指标的极小极大优化数学模型及求解方法。江涛等[10]证明了基于区间模型的非概率指标只能存在于标准化区间向量张成的凸域，并给出了求解非概率可靠性指标的一维数值优化方法。然而，目前对于非概率可靠性灵敏度分析的研究则相对较少，如李贵杰等[11]基于区间非概率可靠性模型，给出了非概率可靠性灵敏度分析的优化解法；唐樟春等[12]针对区间非概率可靠性模型，提出了一种基本变量对系统非概率可靠性指标影响的非概率重要性测度分析方法。

但上述研究均针对变量相互独立情况下的区间变量进行灵敏度分析，没有考虑变量相关的情形。

本文基于不确定性的凸模型描述，研究考虑变量相关情况下非概率可靠性指标及其参数灵敏度的求解方法。从非概率可靠性指标的几何意义出发，将可靠性指标的求解问题转化为极限状态面到坐标原点的最短距离的求解问题，并采用改进的蒙特卡洛法求解得到结构非概率可靠性指标。在此基础上基于差分理论，提出了

相关变量存在下的非概率可靠性灵敏度分析方法。该方法可靠性指标及灵敏度计算公式简便，算法稳定。数值算例验证了所提方法的可行性和有效性。

1 考虑变量相关性时不确定性信息描述方法

在实际的工程结构中，所考虑的不确定性可能来源于结构尺寸的误差、材料性质的不稳定以及荷载的扰动等各种不同情况。当上述不确定性因素中部分参数存在某种制约关系，而与其他不确定参数相互独立时，则可按照其相关性将不确定参数分为m组，用相对变差向量形式表示为：

$$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}=\{\boldsymbol{\delta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\delta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\delta}_m^{\mathrm{T}}\}\quad(i=1,2,\cdots,m)\quad。\tag{1}$$

将每组无量纲不确定参数δ_i^{T}的变差范围（或界限）用一个超椭球集合来界定，形成多椭球模型，即：

$$\boldsymbol{\delta}\in E=\{\boldsymbol{\delta}_i:\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\delta}_i\leqslant\varepsilon_i^2,(i=1,2,\cdots,m)\}\ ,\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{W}_i$称为第i个超椭球集合的形状矩阵，具有对称正定性，确定超椭球的形状及主轴方向。$\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,m)$为实常数，控制着各超椭球体的大小。这里，$\boldsymbol{W}_i$和$\varepsilon_i$可通过对已有观测样本进行数据分析来客观决定。显然，对于多椭球模型而言，若每组集合中仅包含1个不确定参数，即退化为多维区间模型；故区间模型和椭球模型是多椭球模型的两种特例。

2 考虑变量相关性时的非概率可靠性指标定义

当考虑变量相关性时，结构变量的不确定性可以用多椭球模型来描述。为了便于论述，本文以包含3个变量的二维多椭球模型为例进行分析。设确定变量$\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,x_3\}^{\mathrm{T}}$的名义值$\bar{\boldsymbol{X}}=\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}^{\mathrm{T}}$，包含的不确定性参数（离差）为$\boldsymbol{\delta}=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}^{\mathrm{T}}$，其中变量$x_1$和$x_2$相关，与$x_3$相互独立，则采用多椭球模型的描述形式可表示为：

$$(\delta_1,\delta_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{pmatrix}\leqslant\varepsilon_1^2,\ \delta_3^2\leqslant\varepsilon_2^2\quad,\tag{3}$$

式中，ε_1和ε_2为正实数，表示不确定的范围的大小。显然该多椭球为两个椭球构成，其中一个椭球仅有1个变量，退化为区间变量。

则相关变量与区间变量并存下的多椭球模型的几何示意图如图1所示。

在其原不确定性空间进行线性变换，引入标准化向量：

$$\boldsymbol{q}_i=(1/\varepsilon_i)\,\boldsymbol{\Lambda}_i^{1/2}\boldsymbol{Q}_i\delta_i^{\mathrm{T}}\quad(i=1,2,\cdots,m)\quad,\tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_i$和$\boldsymbol{\Lambda}_i$分别为椭球形状矩阵$\boldsymbol{W}_i$的特征向量和特征值对角矩阵，有$\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{\Lambda}_i$。

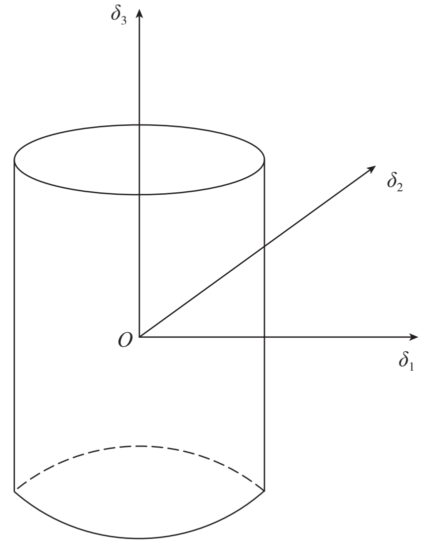

图1 多椭球模型

Fig.1 Multi-ellipsoid model

经过式（4）的变换后，式（3）表示的原多椭球转换为标准化q空间下$\{q_i:q_i^{\mathrm{T}}q_i\leqslant1\ (i=1,2)\}$如图2所示的单位超球体。该超球体包含两个广义椭球集合，在标准空间中描述为：

$$\left(q:(q_1,q_2)\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\leqslant1,\ q_3^2\leqslant1\right)\quad。\tag{5}$$

同时，结构的极限状态可用方程$g(\boldsymbol{q})=0$来表示，该极限状态将标准化q空间划分为安全区（$g(\boldsymbol{q})>0$）与失效区（$g(\boldsymbol{q})<0$）两部分。标准化不确定凸集合为一个底半径为1，高为2的圆柱体，若将其等比例放大，能够得到与极限状态曲面刚好相切的临界失效点A。

根据标准多椭球集合的边界形状，可采用一种"广义无穷范数"定义标准$\boldsymbol{q}$空间中向量$\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}=\{q_1^{\mathrm{T}},q_2^{\mathrm{T}},\cdots,q_m^{\mathrm{T}}\}$的"长度"为：

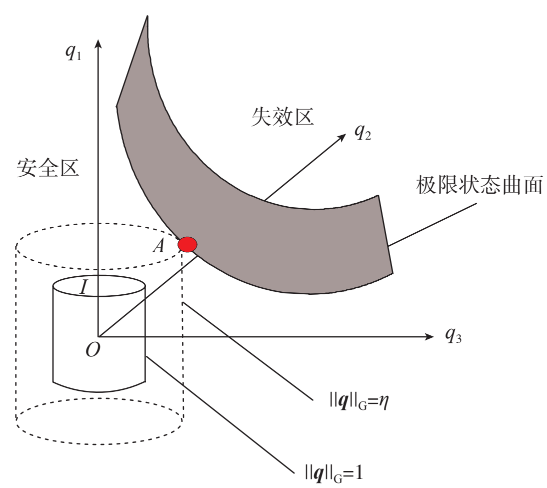

图2 非概率可靠性指标的物理意义

Fig. 2 Physical meaning of non-probabilistic reliability index

$$\|\boldsymbol{q}\|_G=\left\|\sqrt{q_1^Tq_1},\sqrt{q_2^Tq_2},\dots,\sqrt{q_m^Tq_m}\right\|_\infty$$
$$=\max\left(\sqrt{q_1^Tq_1},\sqrt{q_2^Tq_2},\cdots,\sqrt{q_m^Tq_m}\right)\quad。\qquad(6)$$

结构的非概率可靠性指标可以用原点到极限状态曲面以广义最小无穷范数来度量的最短距离来定义 [13]，即：

$$\eta=\mathrm{sgn}(g(0))\cdot\min_{q:g(q)=0}(\|q\|_G)$$
$$=\mathrm{sgn}(g(0))\cdot\min_{q:g(q)=0}\left(\max\left(\sqrt{q_1^Tq_1},\sqrt{q_2^Tq_2},\cdots,\sqrt{q_m^Tq_m}\right)\right)\quad,\qquad(7)$$
$$\mathrm{s.t.}\ \ g(\boldsymbol{x})=0$$

其中，sgn(·)为符号函数，定义为其作用是：当极限状态函数在不确定变量名义值处为负值时，定义的非概率可靠性指标取负值。结构的非概率可靠性指标 的物理意义为标准化不确定凸集合内，极限状态曲面上到坐标原点以“广义无穷范数”度量的最短距离。该距离反映了结构所能容许的最大不确定性程度。

当多椭球模型退化为多维区间模型时，式（7）所示的范数定义退化为无穷范数（或称最大范数）$\|\boldsymbol{q}\|_\infty=\max(|q_1|,|q_2|,\cdots,|q_m|)$，相应的区间非概率可靠性指标为：

$$\eta=\mathrm{sgn}(g(0))\times\min_{q:g(q)=0}(\max(|q_1|,|q_2|,\cdots,|q_m|))$$
$$\mathrm{s.t.}\ \ g(\boldsymbol{x})=0\quad。\qquad(8)$$

当多椭球模型退化为单椭球模型时，式（7）则退化为 Euclidean 范数$\|\boldsymbol{q}\|=\sqrt{\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}}$，相应的非概率可靠性指标退化为：

$$\eta=\mathrm{sgn}(g(0))\times\min_{q:g(q)=0}\left\{\sqrt{\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}}\right\}\quad。\qquad(9)$$
$$\mathrm{s.t.}\ \ g(\boldsymbol{x})=0$$

根据式（7）定义的非概率可靠性指标，能够量化评估结构所能容许的不确定性程度，η值越大，结构越可靠。若$\eta\leqslant-1$，则不确定参数凸集合全部处于失效区内；若$-1<\eta<1$，则凸集合有一个非空子集处于失效区内。对于这两种情况，结构是不可靠的。而当$\eta=1$时，失效区与凸集区域刚好相切或相交，结构处于“临界”失效的状态；当$\eta>1$时，不确定参数的可能取值均处于安全区内，此时结构可靠。

3 基于 Monte-Carlo 法的非概率可靠性及灵敏度分析方法

基于 Monte-Carlo 非概率可靠性指标求解基本思路是从非概率可靠性指标求解的几何意义出发，将非概率可靠性指标问题转化为求解极限状态面到坐标原点的

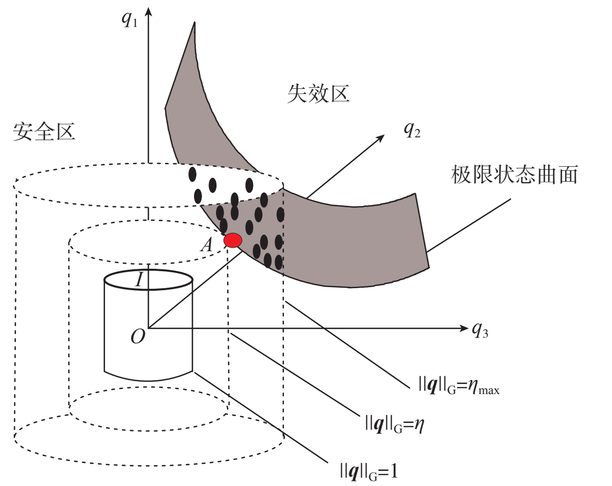

图3 基于蒙特卡洛法的非概率可靠性指标求解原理图

Fig.3 Solution principle of non-probabilistic reliability index based on Monte-Carlo method

最短距离问题。显然对于具体的工程实际问题，均值一般处于安全域内。因此非概率可靠性指标η一般为正值，且通常在$0<\eta<10$范围内。那么在标准化向量空间内给出一个尺寸参数比例因子η_{max}，它将标准化向量空间放大η_{max}倍，并在该放大的向量空间内抽取样本点，选取落入失效域内且距离坐标原点距离最短的点 为设计点，该点往往处于极限状态面上，且是失效域内无穷范数度量下距离坐标原点距离最短的点。其分析原理图见图 3。

从图 3 中可以看到，该方法将结构的非概率可靠性指标求解问题转化为寻找失效域内距离坐标原点距离最短样本点的问题。该样本点 A 称为设计点，该点到原点的“距离”即为结构的非概率可靠性指标。本文从非概率可靠性指标的几何意义出发，采用蒙特卡洛方法计算结构非概率可靠性指标。

3.1 样本点的构造

在构造样本点前需要首先解决一个问题，即尺寸参数比例因子η_{max}的确定。确定η_{max}实际上是确定样本点的边界范围。从图 3 中不难看到，如果η_{max}给得过大，会扩大抽样点的范围，引起过高的计算量，但如果η_{max}给得过小，则可能导致抽样点全落入安全区内，因此无法找到真实的设计点 A。因此在分析时，需要给出一个合理的η_{max}。最有效的方法就是在失效域附近找一个点，然后求解其在标准空间向量下到原点的距离，该距离即为η_{max}。这样确定的 η_{max}既可以保证有样本点落入失效域内，也不会导致过大的抽样范围。

对于区间模型变量$x_i(\bar{x}_i,\delta_i)=\{x_i\,|x_i-\bar{x}|\leqslant\delta_i\}$，在确定了$\eta_{max}$后，可用下式进行抽样：

$$x_i^*=\bar{x}_i-\eta_{max}\times\delta_i\times\cos(\pi*rand())\quad,\qquad(10)$$

式中，$\bar{x}_i$为变量的均值，δ_i为变量的离差，$r$and() 为一可生成 [0,1] 区间上均匀分布的随机数函数。通过上式抽样得到的样本点x_i^*显然位于$\{x_i\,|x_i-\bar{x}|\leqslant -\eta_{\max}\times\delta_i\}$的范围内。

对于超椭球模型$x_i(\bar{x},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{W},\varepsilon)=\{x_i:\left|\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta}\right|\leqslant\varepsilon^2\}$，需要在超椭球内产生均匀分布的随机数。本文的思路是，首先在标准化 $\boldsymbol{q}$ 空间中的单位超球体内进行均匀采样，若 $\boldsymbol{q}$ 的维数为 n，设单位超球体的球坐标为 $(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})$，$r\in[0,1]$，$\theta\in[0,2\pi]$，并有变换关系：

$$\boldsymbol{q}=\begin{cases} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \quad\vdots \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}。\qquad(11)$$

利用公式$\boldsymbol{q}=(1/\varepsilon)\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$的逆变换，则可以将单位超球体内的均匀抽样转化为超椭球体内的均匀抽样，其转化公式为：

$$\boldsymbol{x}=\varepsilon\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}^{1/2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+\bar{\boldsymbol{x}}\quad。\qquad(12)$$

确定 $\eta_{\max}$ 后，要将超椭球 $\boldsymbol{x}(x_i,\boldsymbol{\delta}_i,\boldsymbol{W},\varepsilon)=\{x_i:|(\bar{x}_i-\bar{x}_i)\boldsymbol{W}_i(x_i-\bar{x}_i)|\leqslant\varepsilon^2\}$ 放大 $\eta_{\max}$ 倍，即 $\boldsymbol{x}^*(\bar{x}_i,\delta_i,\boldsymbol{W},\varepsilon)=\{x_i:|(x_i-\bar{x}_i)\boldsymbol{W}_i(x_i-\bar{x}_i)|\leqslant\eta_{\max}\varepsilon^2\}$，因此单位超球体转化后为放大$\eta_{\max}$倍的超椭球变量公式应为：

$$\boldsymbol{x}=\eta_{\max}\varepsilon\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}^{1/2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+\bar{\boldsymbol{x}}\quad。\qquad(13)$$

3.2 Monte-Carlo 方法求解非概率可靠性指标的计算流程

Monte-Carlo 方法的计算精度是通过大量抽取样本点来保证的，抽取的样本点数越多，其寻找的设计点越趋向于真实设计点，计算的稳健可靠性指标越趋向于真值。在保证分析精度的情况下，求解非概率可靠性指标的一般步骤如下。

（1）初次分析时直接利用工程经验给出$\eta_{\max}$，确定抽样次数 N，收敛精度ξ，初始迭代次数 k=1，追加抽样点的次数 m=1，每次追加抽样点的个数 N_{add}，迭代前的η值，一般取 η=1000。

（2）在尺寸参数比例因子为$\eta_{\max}$的凸模型内，进行第 k 次抽样($k=1,2,\cdots,N$)，抽取样本点$\boldsymbol{x}_k^*$，并计算该点的极限状态函数值$g(\boldsymbol{x}_k^*)$，若$g(\boldsymbol{x}_k^*)\leqslant 0$，则用式（7）计算与点$\boldsymbol{x}_k^*$对应的非概率可靠性指标 η_{sample}，若 $\eta_{\mathrm{sample}}\leqslant\eta$，则 $\eta=\eta_{\mathrm{sample}}$。

（3）$k=k+1$，若$k<N$，转入步骤（2）。

（4）若$|\eta-\eta_{\max}|>\xi$，则令$\eta_{\max}=\eta$，$k=1$，$m=m+1$，$N=N+N_{\mathrm{add}}$，转入步骤（2），否则结束循环。

3.3 非概率可靠性灵敏度分析

灵敏度分析是可靠性分析的重要内容，它体现了基本设计变量或其分布参数对输出结果的影响程度。非概率可靠性灵敏度分析主要为了研究各个变量的均值和离差对结构可靠性指标的影响。本文采用有限差分法进行求解。其中非概率可靠性的均值灵敏度可表示为：

$$\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}_i}\approx\frac{\eta(\bar{X}^j)-\eta(\bar{X})}{\Delta\bar{x}_j}\qquad(j=1,2,\cdots,m)\quad,\qquad(14)$$

其中，$\bar{\boldsymbol{X}}$ 为设计变量名义值组成的向量，$\bar{\boldsymbol{X}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)$；$\Delta\bar{\mathrm{X}}_j$为给向量$\bar{\boldsymbol{X}}$ 的第 j 个分量增加 $\Delta\bar{x}_j$；即$\bar{\boldsymbol{X}}_j=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_{j-1},\bar{x}_j+\Delta\bar{x}_j,\bar{x}_{j+1},\cdots,\bar{x}_m)$；$\Delta\bar{x}_j$为变量$x_i$名义值的微小增量。

同理，离差灵敏度分析时变量名义值不变，给离差一个微小增量，按照式（14）求解。

4 算例分析

4.1 变量均为区间变量

图 4 所示某型机翼的 9 盒段结构，由 64 个杆元件和 42 个板元件组成，材料为铝合金。外载荷 P 的波动范围为 1125N $\leqslant P\leqslant$ 1875N，第 i 个单元强度R_i的波动范围为 734.8N $\leqslant R_i\leqslant$ 935.2N（i=68,77,78）。由失效模式的枚举方法可得结构主要失效模式的极限状态函数为$g=4R_{68}-3.999R_{77}+4R_{78}-P$。

采用蒙特卡洛法进行分析时取尺寸比例因子 $\eta_{\max}=2$，计算精度$\xi=0.001$，蒙特卡洛初次抽样次数$N_0=10000$，增加抽样次数 N_{add}=10000，差分步长 Δ=0.01，分析得到结构非概率可靠性指标为$\eta=1.1695$，灵敏度分析结果如表 1 所示。

4.2 变量部分相关

如图 5 所示的悬臂梁，其中部和底端分别受荷载P_1

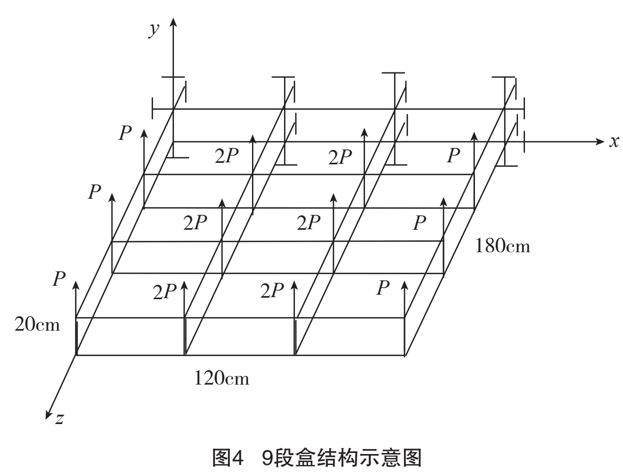

图4 9段盒结构示意图

Fig.4 Schematic diagram of nine-box segment structure

和P_2作用，梁尺寸为$L\times b\times h$，材料弹性模量为E，算例中，E, L, b, h, P_1和P_2均为未知但有界不确定变量，具体不确定性质见表2所示，当梁端部位大于2.54mm时，认为结构失效，极限状态方程定义为：

$$G=2.54-\frac{(5P_1+12P_2)L^3}{3Ebh^3}\quad\text{。}\tag{15}$$

采用蒙特卡洛法进行分析时取尺寸比例因子$\eta_{max}=3$，计算精度$\xi=0.001$，蒙特卡洛初次抽样次数$N_0=10000$，增加抽样次数N_{add}=10000，差分步长$\varDelta$=0.001，分析得到结构非概率可靠性指标为$\eta=2.5148$，灵敏度分析结果如表3所示。

5 结论

本文基于不确定性的凸模型描述，研究考虑变量相关情况下非概率可靠性指标及其参数灵敏度的求解方法。从非概率可靠性指标的几何意义出发，将可靠性指标的求解问题转化为极限状态面到坐标原点最短距离的求解问题，并采用改进的蒙特卡洛法求解得到结构非概率可靠性指标。

在此基础上基于差分理论，提出了相关变量存在下的非概率可靠性灵敏度分析方法。该方法可靠性指标及灵敏度计算公式简便，算法稳定。数值算例验证了所提方法的可行性。

表1 算例1中非概率可靠性及灵敏度分析结果

区间变量	$\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}}$	$\frac{\partial\eta}{\partial\delta}$
R_{68}	0.0259	–0.0303
R_{77}	–0.0210	–0.0054
R_{78}	0.0280	–0.0464
P	–0.0054	–0.0044

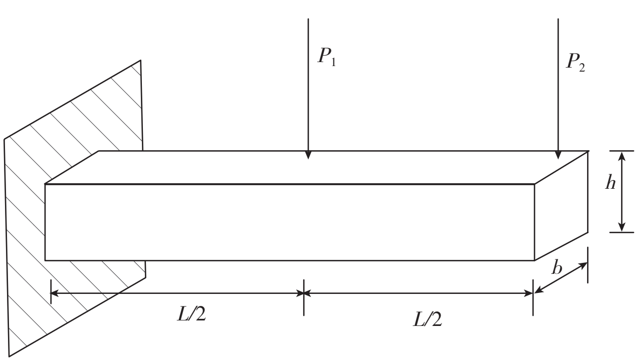

图5 悬臂梁模型

Fig.5 Model of cantilever beam

表2 悬臂梁的不确定性质

不确定变量	数值	模型描述
E/MPa	6.895×10^4	$\delta_E^2\leqslant0.1^2$
L/mm	762	$\delta_L^2\leqslant0.05^2$
b/mm	21.23	$(\delta_b,\delta_h)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_b\\\delta_h\end{pmatrix}\leqslant0.05^2$
h/mm	63.74	
P_1/N	200	$(\delta_{P_1},\delta_{P_2})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{P_1}\\\delta_{P_2}\end{pmatrix}\leqslant0.2^2$
P_2/N	200	

表3 算例2中非概率可靠性及灵敏度分析结果

区间变量	$\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}}$	$\frac{\partial\eta}{\partial\delta}$
E	0.0001	–0.0002
L	–0.0129	–0.0410
b	0.1660	–0.1846
h	0.1689	–0.0238
P_1	–0.0060	–0.0116
P_2	–0.0130	–0.0014

参考文献

[1] Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex models of uncertainty in applied mechanics. Amsterdam: Elsevier,1990.

[2] Elishakoff I. Discussion on a non-probabilistic concept of reliability. Structural Safety, 1995, 17(3):195-199.

[3] 邱志平 . 非概率集合理论凸方法及其应用 . 北京 : 国防工业出版社 , 2005.

[4] 郭书祥 , 吕震宙 , 冯元生 . 基于区间分析的结构非概率可靠性模型 . 计算力学学报 , 2001, 18(1): 56-60.

[5] 亢战 , 罗阳军 . 基于凸模型的结构非概率可靠性优化 . 力学学报 , 2006, 38(6): 807-815.

[6] 郭书祥 , 张陵 , 李颖 . 结构非概率可靠性指标的求解方法 . 计算力学学报 , 2005,22(2): 227-231.

[7] 曹鸿钧 , 段宝岩 . 基于凸集合模型的非概率可靠性研究 . 计算力学学报 , 2005, 22(5): 546-548.

[8] 张新锋 , 赵彦 , 施浒立 . 基于凸集的结构非概率可靠性度量研究 . 机械强度 , 2007, 29(4): 589-592.

[9] 罗阳军 , 亢战 . 超椭球模型下结构非概率可靠性指标的迭代算法 . 计算力学学报 , 2008, 25 (6): 747-752.

[10] 江涛 , 陈建军 , 姜培刚 , 等 . 区间模型非概率可靠性指标的一维优化算法 . 工程力学 , 2007, 24(7): 23-27.

[11] 李贵杰 , 吕震宙 , 王攀 . 结构非概率可靠性灵敏度分析方法 . 航空学报 , 2012, 33(3): 501-507.

[12] 唐樟春 , 吕震宙 , 吕媛波 . 非概率模型中基本区间变量的重要性测度 . 机械强度 , 2011, 33(6): 839-844.

[13] 罗阳军 , 亢战 , Li A. 基于凸模型的结构非概率可靠性指标及其求解方法研究 . 固体力学学报 , 2011, 32(6): 646-654.

（责编　深蓝）